This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

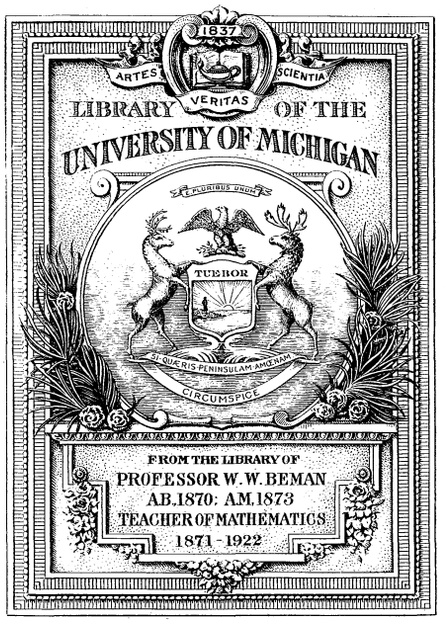
ABN7291
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46722
035/2: : |a (CaOTULAS)160036467
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Lieber, Heinrich Wilhelm, |d 1835-1896, |e ed.
245:00: |a Trigonometrische Aufgaben. |c Hrsg. von Dr. H. Lieber und F. von Lühmann.
250: : |a 3. Aufl.
260: : |a Berlin, |b L. Simion, |c 1889.
300/1: : |a vii, 298 p. |b incl. tables, fold. diagrs. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Trigonometry |x Problems, exercises, etc.
700/1:1 : |a Lühmann, Friedrich von, |d d. 1899, |e joint ed.
998: : |c RAS |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google



Hosted by Google

Trigonometrische Aufgaben.

Herausgegeben

von

Prof. Dr. H. Lieber,

Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin,

und

F. von Lühmann,

Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark.

Mit einer Figurentafel.

Dritte Auflage.

Berlin.

Verlag von Leonhard Simion.

1889.

Hosted by Google

Hosted by Google

Vorrede zur ersten Auflage.

Vor einiger Zeit hatten wir eine Sammlung geometrischer Konstruktionsaufgaben herausgegeben und waren bei der Anordnung der Aufgaben hauptsächlich von dem Grundsatz ausgegangen, daß dieselben, wenn die Gesamtheit der Schüler im stande sein soll, sie zu lösen, systematisch behandelt und in bestimmte Gruppen geteilt werden müssen, für welche die Grundzüge der Lösung anzugeben sind. Nur in diesem Fall können die Schüler wirklich in der Lösung von Aufgaben unterrichtet werden. Daher wird eine Aufgabensammlung auch nur dann ihrem Zweck als Unterrichtsbuch entsprechen, wenn sie nach einem strengen System angelegt ist, so daß der danach unterrichtete Schüler bei jeder einzelnen Aufgabe weiß, was er zu thun hat; welche Hülfslinien er bei einer geometrischen Konstruktionsaufgabe zu ziehen, welche Formeln er bei Lösung einer trigonometrischen Aufgabe anzuwenden hat.

Von diesem Gesichtspunkt ausgehend haben wir jetzt auch die trigonometrischen Aufgaben, besonders die Dreiecks- und Vierecksaufgaben bearbeitet und dabei eine rein analytische Methode angewendet; die Methode, auf Grund von geometrischen Konstruktionen die Aufgaben zu lösen, ist ganz übergangen. Von selbst versteht es sich, daß, um die trigonometrische Auflösung anzubahnen, diejenigen Linien, welche unmittelbar gegeben, in der Figur gezogen sein müssen, aber sonst keine Hülfslinien. Befindet sich z. B. ϱ unter den gegebenen Elementen eines Dreiecks, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises zu zeichnen; ist aber $a + b$ oder $\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente, so darf bei einer rein analytischen Lösung nicht $a + b$, resp. $\varrho_a + \varrho_b$ wirklich konstruiert werden, sondern es genügt im letzteren Falle, wenn ϱ_a und ϱ_b gezeichnet werden. Entschieden ist in didaktischer Beziehung die Vermengung beider Methoden zu verwerfen, da sie nur dazu geeignet ist, bei den Schülern Unklarheit hervorzurufen.

Hosted by Google

Bei der Lösung der Aufgaben selber kommt es unserer Ansicht nach darauf an, zunächst solche Stücke zu berechnen, die sich möglichst leicht und elegant berechnen lassen, und aus denen man dann mittelst einfacher Formeln die übrigen Stücke finden kann. Solche Stücke, die man z. B. bei Dreiecksaufgaben immer zu gewinnen suchen muß, sind namentlich die Winkel, da man durch diese und eins der gegebenen Elemente leicht r und so alles übrige berechnen kann. Wir haben alle Stücke (nur bei a, b, h_a, h_b ist dies nicht vorteilhaft) durch r, γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausgedrückt, da sich die Formeln so besser zur Rechnung eignen und einen leichteren Überblick gewähren. Auch bei allen anderen Aufgaben, selbst den vermischten (4. Abschnitt) haben wir es uns zum Princip gemacht, zunächst immer die unbekannten Winkel zu berechnen, da die resultierenden Formeln in der Regel ungleich einfacher ausfallen, als die, durch welche Linien berechnet werden.

Die Viereksaufgaben sind bisher wenig beliebt gewesen, obgleich sie einen so reichlichen und zweckmäßigen Übungsstoff bieten. Der Grund liegt offenbar darin, daß die resultierenden Formeln nicht die Eleganz und äußere Symmetrie zeigten, wie bei den Dreiecksaufgaben. Vielleicht ist es uns gelungen, durch eine zweckmäßigere Bezeichnung der von den Seiten und Diagonalen gebildeten Winkel diesem Übelstande abgeholfen und dieses Gebiet für die trigonometrische Behandlung zugänglicher gemacht zu haben.

Von den goniometrischen Aufgaben sind nur diejenigen aufgenommen, welche für die Aufgaben der anderen Abschnitte gebraucht werden. Viele trigonometrische Aufgaben sind nämlich nur dann elegant zu lösen und bequem logarithmisch zu berechnen, wenn Hülfswinkel eingeführt werden. Wie schwerfällige und ungeschickte Auflösungen man erhält, wenn man diesen Punkt außer acht läßt, kann man an den trigonometrischen Aufgabensammlungen sehen, welche die Hülfswinkel nur nebensächlich behandeln. Die Schüler müssen daher, bevor sie trigonometrische Aufgaben lösen, in der Einführung und Behandlung der Hülfswinkel, sowie in der Lösung goniometrischer Aufgaben geübt werden. Zur Erreichung dieses Zweckes dienen die Aufgaben des ersten Abschnittes; sie werden sämtlich mehr oder weniger bei den Aufgaben der folgenden Abschnitte gebraucht.

Zur Benutzung dieses Buches beim Unterricht dürfte es sich empfehlen, zunächst die Aufgaben des § 11 zu behandeln und dann zur Vorbereitung für das Folgende die wichtigsten Aufgaben des ersten Abschnittes einzuüben: es wären dies namentlich folgende: § **3**, 1 und 2; § **4**, 1, 13, 14; § **6**, 1, 7, 9; § **7**, 1 und 7; § **9**, 3. Sind diese Aufgaben den Schülern sicher eingeprägt, so werden dieselben schon im stande sein, die meisten übrigen Aufgaben dieses Abschnittes bei einer etwaigen An-

Hosted by Google

wendung in späteren Abschnitten durch eine ähnliche Behandlung selbständig zu lösen. Die schwierigeren Aufgaben, wie § **3**, 3 bis 6 und § **9**, 5 bis 11 brauchten wohl erst dann durchgenommen zu werden, wenn eine der späteren Aufgaben auf dieselben führt.

Bei den Aufgaben aus der angewandten Trigonometrie sind folgende Bücher benutzt: Dr. Ad. Poppe, ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz- und Höhenmessungen. J. Helmes, die ebene Trigonometrie. Dr. Carl Hechel, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. K. H. Schellbach, mathematische Aufgaben.

Die Tafel der pythagoreischen Dreiecke ist die von Bretschneider im ersten Teil von Grunerts Archiv veröffentlichte; jedoch ist in derselben das Versehen in Nr. 77, welches sich von da in mehrere Aufgabensammlungen und Lehrbücher der Trigonometrie eingeschlichen hat, berichtigt. Die zweite Tafel enthält numerische Werte für die am häufigsten vorkommenden Dreiecksstücke, welche an Stelle der Zahlenbeispiele treten können. Dieselbe dürfte den Lehrern der Mathematik erwünscht sein, da, soviel uns bekannt, in den vorhandenen Tafeln außer den Seiten und Winkeln nur eine Höhe, die durch dieselbe gebildeten Abschnitte, die Radien des Um- und Inkreises und der Inhalt berechnet sind.

Im April 1874.

Vorrede zur dritten Auflage.

In der neuen Auflage sind nur unbedeutende Veränderungen vorgenommen. Die Bezeichnung der Elemente des gleichschenkligen Dreiecks ist etwas verändert und die Tafel der pythagoreischen Dreiecke ist dadurch vervollständigt, daß noch die Höhe und die beiden Höhenabschnitte berechnet sind.

Im Januar 1889.

Hosted by Google

Inhalts-Verzeichnis.

I. Abschnitt.

Goniometrische Hülfsmittel.

Seite

§ 1. Trigonometrische Funktionen ausgedrückt durch andere trigonometrische Funktionen 3

§ 2. Relationen zwischen den Funktionen von Winkeln, deren Summe noch eine Bedingung erfüllen soll 4

§ 3. Anwendung der Hülfswinkel bei der Berechnung von Ausdrücken und der Lösung von Gleichungen 6

§ 4. Zwei Winkel zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist 8

§ 5. Zwei Winkel zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz der Quadrate ihrer Sinus oder Cosinus, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist 10

§ 6. Zwei Winkel zu berechnen, wenn die Produkte ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist 11

§ 7. Zwei Winkel zu berechnen, wenn der Quotient ihrer Sinus oder Cosinus und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist 12

§ 8. Zwei Winkel zu berechnen, wenn zwei Summen oder Differenzen aus ihren Sinus und Cosinus, oder aus ihren Tangenten und Cotangenten gegeben sind 13

§ 9. Winkel zu berechnen, wenn zwei Produkte oder zwei Quotienten ihrer Sinus oder Cosinus gegeben 15

§ 10. Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen 20

II. Abschnitt.

Dreiecks-Aufgaben.

§ 11. Aufgaben, welche durch einfache Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind 21

§ 12. Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, besonders solche, in denen Aggregate der Seiten gegeben 24

§ 13. Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck 29

§ 14. Dreiecksaufgaben, wenn r, a, b, c, $a \pm b$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $s-a$, $s-b$, $s-c$, h_a, h_b, h_c, $h_b \pm h_a$, p, q, $p-q$, w_c, u, v, $u-v$, t_c, $\triangle$, $a^2 \pm b^2$, $a^2+b^2-c^2$, ab gegebene Elemente sind, und wenn dieselben nicht unmittelbar auf einen der vier Hauptfälle führen 38

§ 15. Dreiecksaufgaben, wenn Radien der Berührungskreise gegeben . . . 56

§ 16. Aufgaben in denen Mittellinien oder durch diese bedingte Winkel gegeben sind 81

Hosted by Google

Seite

§ 17. Aufgaben, in denen Verhältnisse gegeben 88
§ 18. Aufgaben, in denen eine Relation zwischen den Winkeln besteht . . 107
§ 19. Auflösung der kubischen Gleichungen nebst Aufgaben 112

III. Abschnitt.

Vierecks-Aufgaben.

A. Einfache Vierecks-Aufgaben, welche durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§ 20. Aufgaben über den Rhombus 124
§ 21. Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt 124
§ 22. Aufgaben über das Parallelogramm 125
§ 23. Aufgaben über das Antiparallelogramm 125
§ 24. Aufgaben über das Trapez 126
§ 25. Aufgaben über das Sehnenviereck 127
§ 26. Aufgaben über das Tangentenviereck 129
§ 27. Einfache Aufgaben über das allgemeine Viereck 129

B. Vierecks-Aufgaben, welche nicht unmittelbar durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§ 28. Aufgaben über den Rhombus 131
§ 29. Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt 132
§ 30. Aufgaben über das Parallelogramm 133
§ 31. Aufgaben über das Antiparallelogramm 141
§ 32. Aufgaben über das Sehnentangentenviereck 143
§ 33. Aufgaben über das Tangententrapez 152
§ 34. Aufgaben über das Sehnenviereck 162
§ 35. Aufgaben über das Tangentenviereck 189
§ 36. Aufgaben über das Trapez 200
§ 37. Aufgaben über das allgemeine Viereck 211

IV. Abschnitt.

Vermischte Aufgaben 223
§ 38. Gegeben gerade Linien, Punkte, Dreiecke; gesucht gerade Linien oder Punkte 224
§ 39. Aufgaben über den Kreis. Gegeben Kreise, Linien und Punkte, gesucht Linien und Punkte 236
§ 40. Aufgaben über den Kreis. Gegeben gerade Linien, Punkte, Kreise, gesucht ein Kreis 253

V. Abschnitt.

Aufgaben aus der angewandten Trigonometrie.

§ 41. Aufgaben über Höhenmessungen 264
§ 42. Aufgaben über Distanzmessungen 278
§ 43. Parallaxen-Aufgaben 285

Anhang.

1. Tabelle pythagoreischer Dreiecke 287
2. Tabelle vollständig berechneter schiefwinkliger Dreiecke zu Zahlenbeispielen für die Dreiecks-Aufgaben 290

Hosted by Google

Hosted by Google

Bezeichnungen.

1. Rechtwinkliges Dreieck. R $\triangle$ ABC, der rechte Winkel bei C; Katheten a und b; Hypotenuse c; α und β Gegenwinkel von a und b; Höhe h; die durch h auf c gebildeten Abschnitte sind p und q; p liegt an a, q an b.
2. Gleichschenkliges Dreieck. Schenkel a; Grundlinie c; Basiswinkel α; Winkel an der Spitze γ; h_c die auf die Grundseite gefällte Höhe; p und q sind die von der Höhe h_a auf a gebildeten Abschnitte, q liegt an c; u und v sind die von der Halbierungslinie w_a des Winkels α auf dem Schenkel a gebildeten Abschnitte, v liegt an c; t_a ist die von dem Endpunkt der Grundseite nach der Mitte von a gezogene Transversale; ρ ist der Radius des inneren Berührungskreises; ρ_c der Radius des zur Grundseite gehörenden äußeren Berührungskreises.
3. Allgemeines Dreieck. $\triangle$ ABC.

   α Winkel bei A, a Gegenseite von α ($a > b$).
   β Winkel bei B, b Gegenseite von β.
   γ Winkel bei C, c Gegenseite von γ.
   h_a die von A auf a gefällte Höhe.
   h_b die von B auf b gefällte Höhe.
   h_c die von C auf c gefällte Höhe.
   t_a die von A nach der Mitte von a gezogene Transversale.
   t_b die von B nach der Mitte von b gezogene Transversale.
   t_c die von C nach der Mitte von c gezogenen Transversale.
   Wenn AD, BE und CF die Mittellinien, also resp. t_a, t_b, t_c sind, welche sich in S schneiden, so bezeichnen wir $\angle$ DAB $= \alpha_1$, DAC $= \alpha_2$, $\angle$ EBC $= \beta_1$, $\angle$ EBA $= \beta_2$, $\angle$ ACF $= \gamma_1$, $\angle$ BCF $= \gamma_2$, $\angle$ AFC $= \varepsilon$.
   w_a Halbierungslinie des Winkels α.
   w_b Halbierungslinie des Winkels β.
   w_c Halbierungslinie des Winkels γ.
   r Radius des Umkreises.
   ρ Radius des Inkreises.
   ρ_a Radius des Ankreises der Seite a.

Hosted by Google

ρ_b Radius des Ankreises der Seite b.
ρ_c Radius des Ankreises der Seite c.
p und q sind die von h_c auf c gebildeten Abschnitte; p liegt an a, q an b.
u und v sind die von w_c auf c gebildeten Abschnitte; u liegt an a, v an b.
$\triangle$ Inhalt des Dreiecks.
$\angle(t_a\, b)$ ist der von t_a und b gebildete Winkel.

4. Rhombus ABCD. Seite a, spitze Winkel α, größere Diagonale e, kleinere Diagonale f, Inhalt F.
5. Rhomboid. (Ungleichseitiges Parallelogramm.) ABCD. Seite $AB = DC = a$, $AD = BC = b$, Diagonale $AC = e$, $BD = f$, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel $BAD = \alpha$, $ADB = \alpha'$, $ACB = \alpha''$, $DCA = \beta'$, $DBA = \beta''$, $AEB = \varepsilon$, Inhalt F.
6. Antiparallelogramm ABCD. Größere Parallele $AB = a$, kleinere Parallele $DC = c$, Seite $AD = BC = b$, Diagonale $AC = BD = e$, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel $DAB = \alpha$, $ADB = ACB = \alpha'$, $BAC = BDC = DBA = DCA = \beta'$, $DAC = DBC = \gamma'$, $AEB = \varepsilon$, Inhalt F.
7. Trapez ABCD. Größere Parallele $AB = a$, kleinere Parallele $DC = c$, Seite $BC = b$, $AD = d$, Diagonale $AC = e$, $BD = f$, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel $DAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $ADB = \alpha'$, $ACB = \alpha''$, $BAC = DCA = \beta'$, $BDC = DBA = \beta''$, $CBD = \gamma'$, $CAD = \gamma''$, $AEB = \varepsilon$, Inhalt F.
8. Sehnenviereck ABCD. Seite $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, Diagonale $AC = e$, $BD = f$, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel $DAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \pi - \alpha = \gamma$, $CDA = \pi - \beta = \delta$, $ADB = ACB = \alpha'$, $BAC = BDC = \beta'$, $CBD = CAD = \gamma'$, $DCA = DBA = \delta'$, $AEB = \varepsilon$, Inhalt F.
9. Allgemeines Viereck ABCD. Seite $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, Diagonale $AC = e$, $BD = f$, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel $DAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $CDA = \delta$, $ADB = \alpha'$, $ACB = \alpha''$, $BAC = \beta'$, $BDC = \beta''$, $CBD = \gamma'$, $CAD = \gamma''$, $DCA = \delta'$, $DBA = \delta''$, $AEB = \varepsilon$, Inhalt F.
10. Tangenten-Trapez wie Trapez.
11. Tangenten-Antiparallelogramm wie Antiparallelogramm.
12. Tangenten-Viereck wie allgemeines Viereck.
13. P, P′, ... bezeichnen Punkte.
14. L, L′, ... bezeichnen Linien.
15. K, K′, ... bezeichnen Kreise resp. mit den Radien r, r′, ...

Hosted by Google

Erster Abschnitt.

Goniometrische Hülfsmittel.

---

§. 1.

Trigonometrische Funktionen der Winkel ausgedrückt durch andere trigonometrische Funktionen.

a) Funktionen der Winkel ausgedrückt durch andere Funktionen derselben Winkel.

1. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos \alpha^2}$
2. $\sin \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}}$
3. $\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot \alpha^2}}$
4. $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin \alpha^2}$
5. $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}}$
6. $\cos \alpha = \dfrac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot \alpha^2}}$
7. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin \alpha^2}}$
8. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{1 - \cos \alpha^2}}{\cos \alpha}$
9. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\cot \alpha}$
10. $\cot \alpha = \dfrac{\sqrt{1 - \sin \alpha^2}}{\sin \alpha}$
11. $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha^2}}$
12. $\cot \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

b) Funktionen der Winkel ausgedrückt durch Funktionen der halben Winkel.

13. $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$
14. $\sin \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2}$
15. $\sin \alpha = \dfrac{2 \cot \frac{1}{2} \alpha}{1 + \cot \frac{1}{2} \alpha^2}$
16. $\cos \alpha = \cos \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin \frac{1}{2} \alpha^2$
17. $\cos \alpha = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2$
18. $\cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 - 1$
19. $\cos \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2}$
20. $\cos \alpha = \dfrac{\cot \frac{1}{2} \alpha^2 - 1}{\cot \frac{1}{2} \alpha^2 + 1}$
21. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin \frac{1}{2} \alpha^2}$
22. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{1 - 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}$

Hosted by Google

23. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2-1}$

24. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}$

25. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}$

26. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\alpha^2-\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$

27. $\cot\alpha = \dfrac{1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$

28. $\cot\alpha = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2-1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$

29. $\cot\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}$

30. $\cot\alpha = \dfrac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}{2\cot\frac{1}{2}\alpha}$

c) Funktionen der halben Winkel ausgedrückt durch Funktionen der ganzen Winkel.

31. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$

32. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

33. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$

34. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

35. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

§. 2.

Relationen zwiſchen den Funktionen von Winkeln, deren Summe noch eine Bedingung erfüllen ſoll.

a) In den folgenden Aufgaben ſind 3 Winkel α, β, γ gegeben, deren Summe $= \pi$ iſt.

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ (\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma$.

2) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma$.

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - 2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 2\sin\frac{1}{2}\gamma\ (\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)) = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$.

4) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma + 1 = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma$.

5) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 4(\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta^2 + 2\sin\alpha^2\sin\beta\cos\beta) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

6) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

7) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos\gamma^2 = 2\cos(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\} = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

8) $\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma + 1 = 4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

9) $\sin\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \cos\frac{1}{2}\alpha$

Hosted by Google

$\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\alpha \left\{ \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \right\}$
$= \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma.$

10. $\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma + \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = 1.$

11. $\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

12. $\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 1.$

13. $\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} =$
$\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma \,(\sin \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \cot \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma.$

14. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$

15. $\sin(4n+1)\alpha + \sin(4n+1)\beta + \sin(4n+1)\gamma =$
$2 \sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) +$
$\sin(4n+1)(\pi - (\alpha+\beta)) = 2 \sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)$
$\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + \sin(4n+1)(\alpha+\beta) =$
$2 \sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \left\{ \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \right\} = 4 \cos \frac{1}{2}(4n+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+1)\beta$
$\cos \frac{1}{2}(4n+1)\gamma.$

16. $\sin(4n+2)\alpha + \sin(4n+2)\beta + \sin(4n+2)\gamma =$
$4 \sin(2n+1)\alpha \sin(2n+1)\beta \sin(2n+1)\gamma.$ Ähnlich wie 15.

17. $\sin(4n+3)\alpha + \sin(4n+3)\beta + \sin(4n+3)\gamma =$
$-4 \cos \frac{1}{2}(4n+3)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+3)\beta \cos \frac{1}{2}(4n+3)\gamma.$

18. $\sin 4n\alpha + \sin 4n\beta + \sin 4n\gamma = -4 \sin 2n\alpha \sin 2n\beta \sin 2n\gamma.$

19. $\cos(4n+1)\alpha + \cos(4n+1)\beta + \cos(4n+1)\gamma =$
$2 \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) -$
$\cos(4n+1)(\alpha+\beta) = 2 \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)$
$\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + 1 - 2 \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)^2 =$
$1 + 4 \sin \frac{1}{2}(4n+1)\alpha \sin \frac{1}{2}(4n+1)\beta \sin \frac{1}{2}(4n+1)\gamma.$

20. $\cos(4n+2)\alpha + \cos(4n+2)\beta + \cos(4n+2)\gamma =$
$1 - 4 \cos \frac{1}{2}(4n+2)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+2)\beta \cos \frac{1}{2}(4n+2)\gamma$

21. $\cos(4n+3)\alpha + \cos(4n+3)\beta + \cos(4n+3)\gamma =$
$1 - 4 \sin \frac{1}{2}(4n+3)\alpha \sin \frac{1}{2}(4n+3)\beta \sin \frac{1}{2}(4n+3)\gamma.$

22. $\cos 4n\alpha + \cos 4n\beta + \cos 4n\gamma = 1 + 4 \cos 2n\alpha \cos 2n\beta \cos 2n\gamma.$

b) In den folgenden Aufgaben sind 4 Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben, deren Summe $= 0$ ist.

Hosted by Google

23. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + 2\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)\right\} = 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\gamma-\delta-\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma-\delta) = 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$; mithin allgemein, welche Werte auch α, β, γ haben mögen, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$ (F).

Anmerk. Aus dieser Formel (F) lassen sich nun mehrere der vorhergehenden Formeln durch einfache Substitutionen ableiten; wenn nämlich angenommen wird, daß $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ ist.

α) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$, also (1).

β) In (F) $-\gamma$ für γ gesetzt, giebt $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) = 4\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) + \sin 2\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\sin\frac{3}{2}\gamma\right\} + \sin 2\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin 2\gamma - \sin\gamma + \sin 2\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\} = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$, also (2).

γ) 2α für α, 2β für β und 2γ für γ in F eingesetzt, giebt $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, also (5).

δ) 2α für α, 2β für β und -2γ für γ in F eingesetzt, giebt ähnlich wie in β: $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$, also (6).

ε) $4n\alpha$ für α, $4n\beta$ für β und $4n\gamma$ für γ in F eingesetzt, giebt: $\sin 4n\alpha + \sin 4n\beta + \sin 4n\gamma = -4\sin 2n\alpha\sin 2n\beta\sin 2n\gamma$.

Auch die Substitutionen $(4n+1)\alpha$, $(4n+2)\alpha$, $(4n+3)\alpha$ u. s. w. für α, β, γ in Formel (F) geben resp. (15), (16), (17).

24) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)\right\} = 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta-\gamma+\delta) = 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$; also $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (G).

Anmerk. Aus Formel (G) lassen sich nun ähnlich wie in 23, unter der Voraussetzung, daß $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, die früheren Formeln 3, 4, 7, 8, 19, 20, 21, 22 herleiten.

§. 3.

Anwendung der Hülfswinkel bei der Berechnung von Ausdrücken und der Lösung von Gleichungen.

1. φ zu berechnen aus $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c$. 1. Aufl. Wird $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi$ gesetzt, so ergiebt sich $\sin\varphi + \operatorname{tg}\psi\cos\varphi = \frac{c}{a}$ und

hieraus $\sin(\varphi+\psi)=\frac{c\cos\psi}{a}=\frac{c\sin\psi}{b}$; letzterer Ausdruck liefert für $\psi>\frac{1}{4}\pi$, ersterer für $\psi<\frac{1}{4}\pi$ eine genauere numerische Berechnung. 2. Aufl. $\sin\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2}$ und $\cos\varphi=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2}$; mithin $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{2a}{b+c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi+\frac{c-b}{c+b}=0$. Die Berechnung von φ nach dieser Formel ist einfacher, wenn b und c Summen und Differenzen derselben Größen sind.

2. x zu berechnen aus $x=a\sin\alpha+b\cos\alpha$. Aufl. $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, giebt $x=a(\sin\alpha+\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)$ oder $x=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{b\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}$.

φ und ψ zu berechnen aus

3. $a\sin\varphi+b\sin\psi=c$ und $\varphi+\psi=2\sigma$. Aufl. $\varphi-\psi=2\delta$ gesetzt, giebt $\varphi=\sigma+\delta$ und $\psi=\sigma-\delta$, mithin $a\sin(\sigma+\delta)+b\sin(\sigma-\delta)=c$, und $(a+b)\sin\sigma\cos\delta+(a-b)\cos\sigma\sin\delta=c$, also δ nach 1) zu berechnen.
4. $a\sin\varphi+b\sin\psi=c$ und $\varphi-\psi=2\delta$. Aufl. ähnlich wie 3.
5. $a\cos\varphi+b\cos\psi=c$ und $\varphi+\psi=2\sigma$. Aufl. $\varphi-\psi=2\delta$ gesetzt, giebt $a\cos(\sigma+\delta)+b\cos(\sigma-\delta)=c$, also $(a+b)\cos\sigma\cos\delta-(a-b)\sin\sigma\sin\delta=c$, woraus δ nach 1) zu berechnen.
6. $a\cos\varphi+b\cos\psi=c$ und $\varphi-\psi=2\delta$. Aufl. ähnlich wie 5.
7. $\frac{a+b}{a-b}$ mittels eines Hülfswinkels zu berechnen, wenn a und b Produkte sind. Aufl. Es ist $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$. Setzen wir nun

a) $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, so ist $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi-\varphi)}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi-\varphi)}=\cot(\frac{1}{4}\pi-\varphi)=\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\varphi)$. b) $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi^2$ gesetzt, giebt $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi^2}{1-\operatorname{tg}\varphi^2}=\frac{\cos\varphi^2+\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2-\sin\varphi^2}=\frac{1}{\cos 2\varphi}$. c) $\frac{b}{a}=\cos\varphi$ gesetzt, wenn $b<a$, giebt $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}=\cot\frac{1}{2}\varphi^2$.

Hosted by Google

8. $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$ mittels eines Hülfswinkels zu berechnen. Aufl. $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b} = \sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}} \pm \sqrt{1-\frac{b}{a}}\right)$; $\frac{b}{a} = \cos\varphi$ gesetzt, giebt $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b} = \sqrt{a}\,(\sqrt{1+\cos\varphi} \pm \sqrt{1-\cos\varphi}) = \sqrt{2a}\,(\cos\frac{1}{2}\varphi \pm \sin\frac{1}{2}\varphi)$; mithin a) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = 2\sqrt{a}\cos(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\pi)$ und b) $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = 2\sqrt{a}\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)$.

9. φ zu berechnen aus $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a - b\operatorname{tg}\alpha}{a + b\cot\alpha}}$. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\sin\alpha\,(a\cos\alpha - b\sin\alpha)}{\cos\alpha\,(a\sin\alpha + b\cos\alpha)}} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\,\sqrt{\frac{\cos\alpha - \frac{b}{a}\sin\alpha}{\sin\alpha + \frac{b}{a}\cos\alpha}}$; $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi$ gesetzt, giebt $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\,\sqrt{\frac{\cos(\alpha+\psi)}{\sin(\alpha+\psi)}} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cot(\alpha+\psi)}$

10. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ durch Einführung eines Hülfswinkels zur logarithmischen Rechnung geeignet zu machen. 1. Aufl. $c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}}$, und wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\sqrt{ab}}{a-b}$ gesetzt wird, so ist $c = (a-b)\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{a-b}{\cos\varphi}$. 2. Aufl. $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2$; $2ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2$. Dies eingesetzt, giebt $c = \sqrt{(a+b)^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2} = (a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma\sqrt{1 + \left\{\frac{(a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{a-b}\right\}^2}$; und wenn $\frac{(a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{a-b} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird, so ist $c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\varphi}$.

§. 4.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

a) In den folgenden Aufgaben ist die Summe oder Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus gegeben; dieselben sind einfach dadurch zu lösen, daß noch die Differenz oder Summe der halben Winkel berechnet wird.

Hosted by Google

1. $\sin\varphi + \sin\psi = s;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{s}{2\sin\sigma}$.

2. $\sin\varphi + \sin\psi = s;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{s}{2\cos\delta}$.

3. $\sin\varphi - \sin\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{d}{2\cos\sigma}$.

4. $\sin\varphi - \sin\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{d}{2\sin\delta}$.

5. $\cos\varphi + \cos\psi = s;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{s}{2\cos\sigma}$.

6. $\cos\varphi + \cos\psi = s;\ \varphi - \psi = 2\delta$ Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{s}{2\cos\delta}$.

7. $\cos\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{d}{2\sin\sigma}$.

8. $\cos\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = -\frac{d}{2\sin\delta}$.

b) In den folgenden Aufgaben ist die Summe oder Differenz eines Sinus und eines Cosinus gegeben; dieselben sind dadurch, daß für den Cosinus ein Sinus gesetzt wird, auf die Aufgaben 1 bis 4 zurückzuführen.

9. $\sin\varphi + \cos\psi = s,\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin\varphi + \sin(\frac{1}{2}\pi - \psi) = s$; da $\varphi - (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\sigma - \frac{1}{2}\pi$, so ist $2\sin(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi)\cos(\sigma - \frac{1}{4}\pi) = s$; mithin $\sin(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi) = \frac{s}{2\cos(\sigma - \frac{1}{4}\pi)}$.

10. $\sin\varphi + \cos\psi = s,\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\varphi + (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\delta + \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, giebt $\cos(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi) = \frac{s}{2\sin(\delta + \frac{1}{4}\pi)}$.

11. $\sin\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\varphi - (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\sigma - \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, giebt $\cos(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi) = \frac{d}{2\sin(\sigma - \frac{1}{4}\pi)}$.

12. $\sin\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\varphi + (\frac{1}{2}\pi - \psi) = \frac{1}{2}\pi + 2\delta$ gesetzt, giebt $\sin(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi) = \frac{d}{2\cos(\delta + \frac{1}{4}\pi)}$.

c) In den folgenden Aufaben ist die Summe oder Differenz von Tangenten und Cotangenten gegeben; dieselben sind dadurch zu lösen, daß man die Tangente oder Cotangente durch Sinus und Cosinus ausdrückt. In allen Aufgaben ist $\varphi - \psi$ resp. $\varphi + \psi$ nach §. 3, 1 oder 2 zu berechnen.

13. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s,\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\cos\psi} = s$, oder $\frac{2\sin(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)} = s$ oder $s\cos(\varphi - \psi) = 2\sin 2\sigma - s\cos 2\sigma$.

Hosted by Google

14. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $2\sin(\varphi+\psi) - s\cos(\varphi+\psi) = s\cos 2\delta$.
15. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $2\sin(\varphi-\psi) - d\cos(\varphi-\psi) = d\cos 2\sigma$.
16. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d\cos(\varphi+\psi) = 2\sin 2\delta - d\cos 2\delta$.
17. $\cot\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $s\cos(\varphi-\psi) = 2\sin 2\sigma + s\cos 2\sigma$.
18. $\cot\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $2\sin(\varphi+\psi) + s\cos(\varphi+\psi) = s\cos 2\delta$.
19. $\cot\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $d\cos(\psi-\varphi) - 2\sin(\psi-\varphi) = d\cos 2\sigma$.
20. $\cot\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d\cos(\varphi+\psi) = 2\sin 2\delta + d\cos 2\delta$.
21. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $s\sin(\varphi-\psi) + 2\cos(\varphi-\psi) = s\sin 2\sigma$.
22. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $s\sin(\varphi+\psi) = s\sin 2\delta + 2\cos 2\delta$.
23. $\operatorname{tg}\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $d\sin(\varphi-\psi) = d\sin 2\sigma + 2\cos 2\sigma$.
24. $\operatorname{tg}\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d\sin(\varphi+\psi) + 2\cos(\varphi+\psi) = d\sin 2\delta$.

§. 5.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz der Quadrate ihrer Sinus oder Cosinus, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 = s$, $\varphi+\psi = 2\sigma$. Aufl. $2\sin\varphi^2 + 2\sin\psi^2 = 2s$ oder $1 - \cos 2\varphi + 1 - \cos 2\psi = 2s$ oder $\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2(1-s)$ oder $\cos(\varphi-\psi) = \dfrac{1-s}{\cos 2\sigma}$.
2. $\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi+\psi) = \dfrac{1-s}{\cos 2\delta}$.
3. $\sin\varphi^2 - \sin\psi^2 = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi-\psi) = \dfrac{d}{\sin 2\sigma}$.
4. $\sin\varphi^2 - \sin\psi^2 = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi+\psi) = \dfrac{d}{\sin 2\delta}$.
5. $\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi-\psi) = \dfrac{s-1}{\cos 2\sigma}$.
6. $\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi+\psi) = \dfrac{s-1}{\cos 2\delta}$.

Hosted by Google

7. $\cos\varphi^2 - \cos\psi^2 = \mathrm{d}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\psi - \varphi) = \dfrac{\mathrm{d}}{\sin 2\sigma}$.

8. $\cos\varphi^2 - \cos\psi^2 = \mathrm{d}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = \dfrac{\mathrm{d}}{\sin 2\delta}$.

9. $\sin\varphi^2 + \cos\psi^2 = \mathrm{s}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = \dfrac{\mathrm{s} - 1}{\sin 2\sigma}$.

10. $\sin\varphi^2 + \cos\psi^2 = \mathrm{s}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = \dfrac{\mathrm{s} - 1}{\sin 2\delta}$.

11. $\sin\varphi^2 - \cos\psi^2 = \mathrm{d}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\cos 2\sigma}$.

12. $\sin\varphi^2 - \cos\psi^2 = \mathrm{d}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\cos 2\delta}$

§. 6.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Produkte ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\sin\varphi \sin\psi = \mathrm{p}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi) = 2\,\mathrm{p}$ oder $\cos(\varphi - \psi) = 2\,\mathrm{p} + \cos 2\sigma$.
2. $\sin\varphi \sin\psi = \mathrm{p}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \cos 2\delta - 2\,\mathrm{p}$.
3. $\sin\varphi \cos\psi = \mathrm{p}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = 2\,\mathrm{p} - \sin 2\sigma$.
4. $\sin\varphi \cos\psi = \mathrm{p}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = 2\,\mathrm{p} - \sin 2\delta$.
5. $\cos\varphi \cos\psi = \mathrm{p}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = 2\,\mathrm{p} - \cos 2\sigma$.
6. $\cos\varphi \cos\psi = \mathrm{p}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = 2\,\mathrm{p} - \cos 2\delta$.
7. $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \mathrm{p}$ oder $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\cot\psi} = \mathrm{p}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\dfrac{2\sin\varphi \sin\psi}{2\cos\varphi \cos\psi} = \mathrm{p}$ oder $\dfrac{\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)} = \dfrac{1}{\mathrm{p}}$, mithin $\dfrac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)} = \dfrac{1 + \mathrm{p}}{1 - \mathrm{p}}$ oder $\cos(\varphi - \psi) = \dfrac{1 + \mathrm{p}}{1 - \mathrm{p}} \cos 2\sigma$.
8. $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \mathrm{p}$ oder $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\cot\psi} = \mathrm{p}$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \dfrac{1 - \mathrm{p}}{1 + \mathrm{p}} \cos 2\delta$.

Hosted by Google

9. $\operatorname{tg}\varphi \cot\psi = p$ oder $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi+\psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi-\psi) = \frac{p-1}{p+1}\sin 2\sigma$

10. $\operatorname{tg}\varphi \cot\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi-\psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi+\psi) = \frac{p+1}{p-1}\sin 2\delta$.

11. $\cot\varphi \cot\psi = \frac{\cot\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi+\psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi-\psi) = \frac{p+1}{p-1}\cos 2\sigma$.

12. $\cot\varphi \cot\psi = \frac{\cot\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi-\psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi+\psi) = \frac{p-1}{p+1}\cos 2\delta$.

§. 7.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn der Quotient ihrer Sinus oder Cosinus, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = q$, $\varphi+\psi = 2\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \frac{q+1}{q-1}$, also $\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varphi-\psi)} = \frac{q+1}{q-1}$, und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\sigma$. Ist q ein zusammengesetzter Ausdruck, so kann $\frac{1}{q} = \operatorname{tg}\lambda$ gesetzt werden, dann ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{1-\operatorname{tg}\lambda}{1+\operatorname{tg}\lambda}\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi-\lambda)\operatorname{tg}\sigma$.

2. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = q$, $\varphi-\psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}\delta$. Wenn q ein zusammengesetzter Ausdruck ist, so setze $\frac{1}{q} = \operatorname{tg}\lambda$, dann ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda}{1-\operatorname{tg}\lambda}\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\lambda)\operatorname{tg}\delta$.

3. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi+\psi = 2\sigma$. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\varphi-\psi)+\frac{1}{4}\pi) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}(\sigma-\frac{1}{4}\pi)$.

Hosted by Google

4. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi+\psi) - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right)$.

5. $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{q-1}{q+1}\cot\sigma$.

6. $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1-q}{1+q}\cot\delta$.

7. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)} = q$. (Spez. Fall von 1.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\varphi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

8. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)} = q$. (Spez. Fall von 2.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varphi\right) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

9. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = q$. (Spez. Fall von 3.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\varphi+\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\pi\right)$.

10. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} = q$. (Spez. Fall von von 4.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varphi-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\frac{1}{4}\pi\right)$.

11. $\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = q$. (Spez. Fall von 5.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q}\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

12. $\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} = q$. (Spez. Fall von 6.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q}\cot\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

§. 8.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn zwei Summen oder Differenzen aus ihren Sinus und Cosinus, oder aus ihren Tangenten und Cotangenten gegeben sind.

In den Aufgaben 1 bis 7 wird zunächst $\varphi + \psi$ oder $\varphi - \psi$ berechnet; dadurch sind dieselben auf eine der Aufgaben von §. 4, a zurückgeführt.

Hosted by Google

1. $\sin\varphi + \sin\psi = s$, $\cos\varphi + \cos\psi = s'$. Aufl. Durch Verwandlung der gegebenen Gleichungen in Produkte und Division derselben erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{s}{s'}$.

2. $\sin\varphi - \sin\psi = d$, $\cos\varphi - \cos\psi = d'$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = -\frac{d'}{d}$.

3. $\sin\varphi + \sin\psi = s$, $\cos\varphi - \cos\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = -\frac{d}{s}$.

4. $\cos\varphi + \cos\psi = s$, $\sin\varphi - \sin\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{d}{s}$.

5. $\sin\varphi + \cos\psi = s$, $\cos\varphi + \sin\psi = s'$. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\pi) = \frac{s}{s'}$.

6. $\sin\varphi - \cos\psi = d$, $\cos\varphi - \sin\psi = d'$. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\pi) = -\frac{d'}{d}$.

7. $\sin\varphi + \cos\psi = s$, $\cos\varphi - \sin\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\varphi+\psi) - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{d}{s}$.

8. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s$, $\cot\varphi + \cot\psi = s'$. Aufl. $\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{2\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)} = s; \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{2\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)} = s'$; mithin $2\sin(\varphi+\psi) = s\cos(\varphi-\psi) + s\cos(\varphi+\psi)$
$2\sin(\varphi+\psi) = s'\cos(\varphi-\psi) - s'\cos(\varphi+\psi)$ und hieraus $\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{ss'}{s'-s}$ und $\cos(\varphi-\psi) = \frac{(s+s')\sin(\varphi+\psi)}{ss'}$.

9. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\cot\varphi + \operatorname{tg}\psi = s'$. Aufl. $\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\sin\psi} = \frac{2\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)-\sin(\varphi-\psi)} = s; \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\cos\psi} = \frac{2\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)} = s'$. Hieraus $\operatorname{tg}(\varphi-\psi) = \frac{s-s'}{ss'}$ und $\sin(\varphi+\psi) = \frac{(s+s')\cos(\varphi-\psi)}{ss'}$.

10. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\cot\varphi - \cot\psi = d'$. Aufl. $\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{2\sin(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)} = d; \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{2\sin(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)}$

Hosted by Google

$= - d'$. Hieraus $\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{dd'}{d' - d}$ und $\cos(\varphi + \psi) = \frac{(d + d')\sin(\varphi - \psi)}{dd'}$.

§. 9.

Winkel zu berechnen, wenn zwei Produkte oder zwei Quotienten ihrer Sinus oder Cosinus gegeben.

a) Zwei Winkel sind zu berechnen

1. $\sin\varphi \sin\psi = p$, $\cos\varphi \cos\psi = p'$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = p' - p$; $\cos(\varphi - \psi) = p + p'$.
2. $\sin\varphi \cos\psi = p$, $\cos\varphi \sin\psi = p'$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = p + p'$, $\sin(\varphi - \psi) = p - p'$.
3. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{p}{q}$; $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{p'}{q'}$. (Wenn $\frac{p}{q} > 1$, so muß $\frac{p'}{q'} < 1$ sein und umgekehrt.) 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cot\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{p + q}{p - q}$ und $\cot\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cot\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{q' + p'}{q' - p'}$. Hieraus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \pm\sqrt{\frac{(p + q)(q' - p')}{(p - q)(q' + p')}}$ (a) und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \pm\sqrt{\frac{(p - q)(q' - p')}{(p + q)(q' + p')}}$ (b). Aufl. Soll φ allein berechnet werden, so ist folgender Weg einzuschlagen: $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$, also $\frac{q^2}{p^2}\sin\varphi^2 + \frac{q'^2}{p'^2}\cos\varphi^2 = 1 = \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2$; und hieraus $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{p}{p'}\sqrt{\frac{(q' + p')(q' - p')}{(p + q)(p - q)}}$ (c). 3. Aufl. Sind p, q, p', q' Produkte oder Quotienten von Linien, so kann man φ und ψ besser auf folgende Weise berechnen: Man setze $\frac{p}{q} = \operatorname{tg}\mu\cot\nu$ und $\frac{p'}{q'} = \operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\nu$, also $\operatorname{tg}\mu = \sqrt{\frac{pp'}{qq'}}$ (d) und $\operatorname{tg}\nu = \sqrt{\frac{qp'}{pq'}}$ (e). Die vorher aufgestellten Werte in (a) und (b) eingesetzt, giebt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \pm\sqrt{\frac{(\frac{p}{q} + 1)(1 - \frac{p'}{q'})}{(\frac{p}{q} - 1)(1 + \frac{p'}{q'})}} = \pm\sqrt{\frac{\sin(\mu + \nu)\cos(\mu + \nu)}{\sin(\mu - \nu)\cos(\mu - \nu)}}$ $= \pm\sqrt{\frac{\sin 2(\mu + \nu)}{\sin 2(\mu - \nu)}}$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \pm\sqrt{\frac{\sin(\mu - \nu)\cos(\mu + \nu)}{\sin(\mu + \nu)\cos(\mu - \nu)}}$ $= \pm\sqrt{\operatorname{tg}(\mu - \nu)\cot(\mu + \nu)}$. Ferner in (c) eingesetzt, giebt $\operatorname{tg}\varphi =$

Hosted by Google

$\pm\sqrt{\frac{(\cot\mu\cot\nu+1)(\cot\mu\cot\nu-1)}{(1+\cot\mu\,\mathrm{tg}\,\nu)(1-\cot\mu\,\mathrm{tg}\,\nu)}} = \pm\cot\nu\sqrt{\frac{\cos(\mu-\nu)\cos(\mu+\nu)}{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu-\nu)}}$
$= \pm\cot\nu\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)}$. Ebenso $\mathrm{tg}\,\psi =$
$\pm\,\mathrm{tg}\,\nu\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)} = \pm\frac{\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)}}{\cot\nu}$.

4. Aufl. $\frac{q}{p} = \cos\lambda$ und $\frac{p'}{q'} = \cos\lambda'$ in (a), (b) und (c) eingesetzt, giebt $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \pm\sqrt{\frac{(1+\cos\lambda)(1-\cos\lambda')}{(1-\cos\lambda)(1+\cos\lambda')}} =$
$\cot\frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\lambda'$, $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\lambda)(1-\cos\lambda')}{(1+\cos\lambda)(1+\cos\lambda')}} =$
$\pm\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\lambda'$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\lambda'}{\sin\lambda}$ und $\mathrm{tg}\,\psi = \pm\cot\lambda\sin\lambda'$.

5. Aufl. $\frac{p}{q} = \mathrm{tg}\,\varkappa$, $\frac{p'}{q'} = \mathrm{tg}\,\varkappa'$ gesetzt, liefert die einfachen Ausdrücke $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \pm\sqrt{\cot(\varkappa-\frac{1}{4}\pi)\,\mathrm{tg}(\frac{1}{4}\pi-\varkappa')}$ und $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \pm\sqrt{\mathrm{tg}(\varkappa-\frac{1}{4}\pi)\,\mathrm{tg}(\frac{1}{4}\pi-\varkappa')}$; weniger bequem ist dagegen $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{\sin\varkappa}{\sin\varkappa'}\sqrt{-\frac{\cos 2\varkappa'}{\cos 2\varkappa'}}$; $\mathrm{tg}\,\psi = \pm\frac{\cos\varkappa}{\cos\varkappa'}$
$\sqrt{-\frac{\cos 2\varkappa'}{\cos 2\varkappa}}$.

4. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = \frac{p}{q}$, $\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = \frac{p'}{q'}$. (Wenn $\frac{p}{q} > 1$, so muß $\frac{p'}{q'} < 1$ sein). Aufl. wie die von 3., wenn $\psi = \frac{1}{2}\pi - \psi'$ gesetzt wird.

b) Vier Winkel sind zu berechnen.

Die vier Winkel φ, φ' ψ, ψ' zu berechnen aus $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$ (I) und $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$ (II), wenn noch $\varphi \pm \psi$, $\varphi' \pm \psi'$ bekannt ist. Es werde $\varphi+\psi$ mit 2σ, $\varphi'+\psi'$ mit $2\sigma'$, $\varphi-\psi$ mit 2δ, $\varphi'-\psi'$ mit $2\delta'$ bezeichnet, und endlich wollen wir noch die Hülfswinkel $\varkappa$ und λ durch $\mathrm{tg}\,\varkappa = \frac{m}{m'}$, $\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{n}{n'}$ einführen. Nach bekannter Entwicklung erhält man aus (I) $\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(\varphi-\varphi')} = \frac{m+m'}{m-m'}$, oder $\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma+\sigma'+\delta+\delta')}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'+\delta-\delta')}$
$= \frac{m+m'}{m-m'} = -\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi+\varkappa) = \cot(\varkappa-\frac{1}{4}\pi)$ (III) und ebenso aus (II) $\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(\sigma+\sigma'-\delta-\delta')}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'-\delta+\delta')} = \frac{n+n'}{n-n'} = -\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi+\lambda) =$
$\cot(\lambda-\frac{1}{4}\pi)$ (IV).

Hosted by Google

$\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ zu berechnen aus

5. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi + \psi = 2\sigma, \varphi' + \psi' = 2\sigma$. In (III) und (IV) ist σ statt σ' zu setzen, und diese Gleichungen gehen über in $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')} = \frac{m + m'}{m - m'}$ und $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')} = -\frac{n + n'}{n - n'}$. Durch Division ergiebt sich hieraus $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')} = -\frac{(m + m')(n - n')}{(m - m')(n + n')} = -\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\delta + \delta'$ nach §. 6, 9 berechnet werden kann. Es ergiebt sich $\sin(\delta + \delta') = \frac{\sin 2\sigma \cos(\varkappa + \lambda)}{\sin(\varkappa - \lambda)}$. Zur Berechnung von $\delta - \delta'$, mithin auch von δ und δ' selbst, dienen die Gleichungen $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta') = \frac{m - m'}{m + m'}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta') = -\frac{n - n'}{n + n'}$. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta') = -\cot(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta') = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')$.

6. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi - \psi = 2\delta, \varphi' - \psi' = 2\delta$. In (III) und (IV) ist δ für δ' zu setzen. Dann gelangt man durch ähnliche Rechnung wie in 5) zu $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + 2\delta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - 2\delta)} = \frac{(m + m')(n - n')}{(m - m')(n + n')} = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\sigma + \sigma'$ nach §. 6, 10 zu berechnen ist. Man findet $\sin(\sigma + \sigma') = \frac{\sin 2\delta \cos(\varkappa + \lambda)}{\sin(\varkappa - \lambda)}$. Zur Berechnung von $\sigma - \sigma'$ hat man, ähnlich wie in 5), für $\delta - \delta'$ zwei Gleichungen.

7. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi + \psi = 2\sigma, \varphi' + \psi' = \pi - 2\sigma$. In (III) und (IV) ist $\frac{1}{2}\pi - \sigma$ für σ' zu setzen, wodurch diese Gleichungen in $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \delta + \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta')} = \frac{m + m'}{m - m'}$ und $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \delta - \delta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta')} = \frac{n + n'}{n - n'}$, übergehen. Durch Multiplikation erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta') = \frac{(m - m')(n - n')}{(m + m')(n + n')} = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\delta - \delta'$ nach §. 6, 7 berechnet werden kann. Es ergiebt sich $\cos(\delta - \delta') =$

Hosted by Google

$\frac{\sin 2\sigma \cos(\varkappa - \lambda)}{\sin(\varkappa + \lambda)}$. Schließlich findet man $\delta + \delta'$, mithin auch δ und δ' selbst aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \delta + \delta') = \frac{m + m'}{m - m'}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta') = -\cot(\frac{1}{4}\pi - \varkappa) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta') = \frac{n - n'}{n + n'}$. $\cot \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta') = -\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta')$.

8. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$, $\varphi - \psi = 2\delta$, $\varphi' = \psi' = \pi - 2\delta$. In (III) und (IV) ist $\frac{1}{2}\pi - \delta$ für δ' zu setzen. Ähnlich wie bei 7) gelangt man zu $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + 2\delta - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - 2\delta + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{(m - m')(n - n')}{(m + m')(n + n')} = -\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \varkappa) \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\sigma - \sigma'$ nach §. 6, 8 zu berechnen ist. Es ergiebt sich $\cos(\sigma - \sigma') = \frac{\sin 2\delta \cos(\varkappa - \lambda)}{\sin(\varkappa + \lambda)}$. Die Berechnung von $\sigma + \sigma'$ geschieht ähnlich, wie die von $\delta + \delta'$ in 7).

Anmerkung. Ähnlich lassen sich die Winkel φ, φ', ψ, ψ' berechnen, wenn außer (I) und (II) σ und σ' gegeben sind, und $\sigma \pm \sigma'$ ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist; ferner, wenn außer (I) und (II) δ und δ' gegeben sind, und $\delta \pm \delta'$ ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist; schließlich noch, wenn außer (I) und (II) σ und δ' (oder auch σ' und δ) gegeben sind, und $\sigma = \delta'$ oder $\sigma \pm \delta'$ ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist.

9. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$, $\varphi' + \psi' = 2\sigma'$. Aus (III) und (IV) ist $\delta - \delta'$ zu eliminieren und $\delta + \delta'$ zu berechnen. Zur Elimination dient $\sigma - \sigma' = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \delta + \delta')$, mithin $\operatorname{tg}(\sigma - \sigma') = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \delta + \delta')}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \delta + \delta')}$. Setzt man hierin für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + \delta - \delta')$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \delta + \delta')$ ihre aus (III) und (IV) entwickelten Ausdrücke, so erhält man $\operatorname{tg}(\sigma - \sigma') = \frac{(m - m')(n + n') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + \delta + \delta') + (m + m')(n - n') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - \delta - \delta')}{(m + m')(n + n') - (m - m')(n - n') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + \delta + \delta') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - \delta - \delta')}$ und nach einiger Entwicklung $\operatorname{tg}(\sigma - \sigma') = \frac{(mn - m'n') \sin(\sigma + \sigma') + (mn' - m'n) \sin(\delta + \delta')}{(mn + m'n') \cos(\sigma + \sigma') + (mn' + m'n) \cos(\delta + \delta')}$, endlich $(mn' + m'n) \operatorname{tg}(\sigma - \sigma') \cos(\delta + \delta') - (mn' - m'n) \sin(\delta + \delta') = (mn - m'n') \sin(\sigma + \sigma') - (mn + m'n') \operatorname{tg}(\sigma - \sigma') \cos(\sigma + \sigma')$ oder nach Einführung der Hülfswinkel $\sin(\varkappa + \lambda) \operatorname{tg}(\sigma - \sigma') \cos(\delta + \delta') - \sin(\varkappa - \lambda) \sin(\delta + \delta') = -\cos(\varkappa + \lambda) \sin(\sigma + \sigma') -$

Hosted by Google

$\cos(\varkappa - \lambda)\ \mathrm{tg}\,(\sigma - \sigma')\cos(\sigma + \sigma')$. Zunächst ist die rechte Seite nach §. 3, 2 für die Logarithmenrechnung bequemer einzurichten und dann $\delta + \delta'$ nach §. 3, 1 zu berechnen. Zur Berechnung von $\delta - \delta'$, mithin auch von δ und δ' selbst erhält man aus (III) und (IV) $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') = \frac{m - m'}{m + m'}.\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + \delta + \delta') = \mathrm{tg}\,(\varkappa - \frac{1}{4}\pi)\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + \delta + \delta')$ und $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \delta + \delta') = \frac{n - n'}{n + n'}.\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - \delta - \delta') = \mathrm{tg}\,(\lambda - \frac{1}{4}\pi)\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - \delta - \delta')$.

10. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'},\ \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'},\quad \varphi - \psi = 2\,\delta,\quad \varphi' - \psi' = 2\,\delta'.$ Aus (III) und (IV) ist $\sigma - \sigma'$ zu eliminieren, $\sigma + \sigma'$ zu berechnen. Durch ein ähnliches Verfahren wie bei 9) gelangt man zu der Gleichung $(mn' + m'n)\ \mathrm{tg}\,(\delta - \delta')\cos(\sigma + \sigma') - (mn' - m'n)\sin(\sigma + \sigma') = (mn - m'n')\sin(\delta + \delta') - (mn + m'n')\ \mathrm{tg}\,(\delta - \delta')\cos(\delta + \delta')$, die nach Einführung der Hülfswinkel in $\sin(\varkappa + \lambda)\ \mathrm{tg}\,(\delta - \delta')\cos(\sigma + \sigma') - \sin(\varkappa - \lambda)\sin(\sigma + \sigma') = -\cos(\varkappa + \lambda)\sin(\delta + \delta') - \cos(\varkappa - \lambda)\ \mathrm{tg}\,(\delta - \delta')\cos(\delta + \delta')$. Nachdem die rechte Seite nach §. 3, 2 für logarithmische Zwecke bequemer eingerichtet ist, ist $\sigma + \sigma'$ nach §. 3, 1 zu berechnen, dann $\sigma - \sigma'$ aus (III) oder (IV). Übrigens läßt sich diese Aufgabe als specieller Fall der vorigen 9) ansehen und sich auf dieselbe zurückführen, wenn man für ψ und ψ' bezüglich $-\psi$ und $-\psi'$ setzt. Man braucht dann in der Endformel nur σ und δ, sowie σ' und δ' miteinander zu vertauschen.

11. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'},\ \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'},\quad \varphi + \psi + 2\,\sigma,\quad \varphi' - \psi' = 2\,\delta'.$ Aus (III) und (IV) ist $\sigma' - \delta$ zu eliminieren, $\sigma' + \delta'$ zu berechnen. Die Rechnung ist ähnlich auszuführen wie bei 9) und man gelangt schließlich zu $(mn' - m'n)\ \mathrm{tg}\,(\sigma - \delta')\cos(\sigma' + \delta) - (mn' + m'n)\sin(\sigma' + \delta) = (mn - m'n')\ \mathrm{tg}\,(\sigma - \delta')\cos(\sigma + \delta') - (mn + m'n')\sin(\sigma + \delta')$, oder nach Einführung der Hülfswinkel $\sin(\varkappa - \lambda)\ \mathrm{tg}\,(\sigma - \delta')\cos(\sigma' + \delta) - \sin(\varkappa + \lambda)\sin(\sigma' + \delta) = -\cos(\varkappa + \lambda)\ \mathrm{tg}\,(\sigma - \delta')\cos(\sigma + \delta') - \cos(\varkappa - \lambda)\sin(\sigma + \delta')$. Nachdem man die rechte Seite nach §. 3, 2 für logarithmische Zwecke bequemer eingerichtet hat, ist $\sigma' + \delta$ nach § 3, 1 zu berechnen, dann $\sigma' - \delta$ aus (III) oder (IV). Auch diese Aufgabe ergiebt sich als specieller Fall von 9), wenn man daselbst $-\psi'$ für ψ', $-n'$ für n', $-\lambda$ für λ setzt. In den Endformeln sind dann δ' und σ' miteinander zu vertauschen.

Hosted by Google

§ 10.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Erste Auflösungsmethode.

I. $x^2 \pm ax + b = 0$. Beide Wurzeln haben dasselbe Vorzeichen.

1. $x^2 + ax + b = 0$. Beide Wurzeln sind negativ. Es ergiebt sich $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = -\frac{1}{2}a\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$; wir substituieren $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, wo nur das positive Zeichen gilt, da das negative zu demselben Resultat führt; dann sind die Wurzeln der Gleichung $x_1 = -\frac{1}{2}a(1 - \cos\varphi) = -a\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ und $x_2 = -\frac{1}{2}a(1 + \cos\varphi) = -a\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = -\sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$.

2. $x^2 - ax + b = 0$. Beide Wurzeln sind positiv. Durch dieselbe Substitution wie in 1) ergiebt sich $x_1 = a\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$ und $x_2 = a\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$. Dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man bedenkt, daß sich die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ aus $x^2 + ax + b = 0$ ergiebt, wenn das Vorzeichen von x umgekehrt wird.

II. $x^2 \pm ax - b = 0$. Beide Wurzeln haben verschiedene Vorzeichen.

3. $x^2 + ax - b = 0$. Die größere Wurzel ist negativ, die kleinere positiv. Es ist $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b} = \frac{1}{2}a\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$. Wir substituieren $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; so ist $x_1 = \frac{1}{2}a\left(-1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{2}a\,\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$, und $x_2 = -\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{1}{2}a\,\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = -\sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$.

4. $x^2 - ax - b = 0$. Die größere Wurzel ist positiv, die kleinere negativ. Durch dieselbe Substitution wie in 3) ergiebt sich $x_1 = \frac{a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = \sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$; $x_2 = -\frac{a\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$

Zweite Auflösungsmethode.

1. $x^2 + ax + b = 0$. Es ist $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = b$, mithin setzen wir $x_1 = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ und $x_2 = -\sqrt{b}\cot\varphi$.

Hosted by Google

Durch Addition erhalten wir $a = \sqrt{b}\ (\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cot}\varphi)$ oder $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

2. $x^2 - ax + b = 0$. Es ist $x_1 + x_2 = a$ und $x_1 x_2 = b$, daher setzen wir $x_1 = \sqrt{b}\operatorname{tg}\varphi$ und $x_2 = \sqrt{b}\operatorname{cot}\varphi$ und erhalten wie in 1) $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

3. $x^2 + ax - b = 0$. Da $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = -b$, so setzen wir $x_1 = \sqrt{b}\operatorname{tg}\varphi$ und $x_2 = -\sqrt{b}\operatorname{cot}\varphi$, mithin $a = \sqrt{b}\ (\operatorname{cot}\varphi - \operatorname{tg}\varphi) = \frac{2\sqrt{b}\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ oder $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

4. $x^2 - ax - b = 0$. Durch dieselbe Substitution wie in 3) ergiebt sich $\operatorname{tg}(\pi - 2\varphi) = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Zusatz. Wenn die Summe zweier Größen und ihr Produkt gegeben, z. B. $x + y = a$ und $xy = b$, so kann man x und y aus einer quadratischen Gleichung finden; will man aber die unbekannten Größen trigonometrisch berechnen, so kann man sofort, ohne die Gleichung aufzustellen, die bei der zweiten Auflösungsmethode unter 1) und 2) angegebenen Substitutionen machen. Ist $x - y = a$ und $xy = b$ oder $x(-y) = -b$ gegeben, so sind die Substitutionen unter 3) und 4) anzuwenden.

Zweiter Abschnitt.

Dreiecks-Aufgaben.

§ 11.

Aufgaben, welche durch einfache Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

Erster Hauptfall. Gegeben eine Seite c und die Winkel α und β. Aufl. $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$; $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\triangle = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$.

Zweiter Hauptfall. Gegeben zwei Seiten a und c, und $\angle\alpha$, welcher einer von ihnen gegenüberliegt. Aufl. 1) $a > c$;

Hosted by Google

$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}$; $\beta = \pi - (\alpha+\gamma)$; $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. 2) $c > a$; $\sin\gamma = \sin(\pi-\gamma) = \frac{c\sin\alpha}{a}$; dann ergeben sich zwei Werte für β, und zwei Werte für b.

Dritter Hauptfall. Gegeben zwei Seiten a und b, und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ. 1. Aufl. Aus dem Tangentialsatz folgt: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}\gamma}{a+b}$; da $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$, so ergeben sich α und β durch einfache Addition und Subtraktion; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$. 2. Aufl. In den Gaußischen (Mollweideschen) Formeln: $(a+b)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = c\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $(a-b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = c\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ lassen sich die linken Seiten logarithmisch berechnen; durch Subtraktion findet man dann $\log\cot\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, hieraus $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und wie bei der ersten Auflösung α und β; setzt man nun den für $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ gefundenen Wert in jede der beiden Formeln ein, so findet man c auf zwei verschiedene Weisen und hat so gleichzeitig eine Kontrolle der Rechnung. 3. Aufl. Nach dem Projektionssatz ist: $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ (§. 3, 10), $\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Vierter Hauptfall. Gegeben die drei Seiten a, b, c. 1. Aufl. Aus dem Projektionssatz folgt: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, wenn $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$; $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Die Berechnung der Winkel aus den Formeln $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ liefert nicht so sichere Resultate, wie die mittelst der Tangente, da sich letztere mit den Winkeln schneller ändert, als der Sinus und Cosinus.

a) Aufgaben, welche sich auf die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks oder auf den ersten Hauptfall zurückführen lassen.

1. a, b, h_c	8. h_c, p, q	15. h_c, p, γ	22. h_c, p, $\alpha-\beta$
2. a, h_c, α	9. a, p, α	16. b, p, β	23. h_a, p − q, β
3. a, h_c, γ	10. p, α, β	17. b, h_a, q	24. a, h_c, p − q
4. h_c, α, β	11. h_c, p, α	18. h_a, h_c, q	25. w_c, α, β
5. c, h_a, h_b	12. a, p, γ	19. h_a, q, α	
6. h_a, h_c, α	13. a, q, β	20. c, h_a, $\alpha-\beta$	
7. a, p, q	14. a, h_c, q	21. a, p, $\alpha-\beta$	

Hosted by Google

b) Aufgaben, bei deren Lösung der zweite Hauptfall zu benutzen ist.

26. $a, b, p,$ 28. w_c, u, β 30. a, u, γ 32. w_c, p, β.
27. a, w_c, β 29. w_c, u, γ 31. a, w_c, p

c) Aufgaben, bei deren Lösung der dritte Hauptfall Anwendung findet.

33. h_a, h_b, γ
34. h_a, p, β
35. a, h_c, t_c
36. $a, t_c, \angle (c\, t_c)$
37. $c, t_c, \angle (a\, t_c)$
38. h_c, t_c, α
39. $a, c, \angle (c\, t_c)$
40. $a, h_c, \angle (c\, t_c)$
41. $c, h_c, \angle (c\, t_c)$
42. a, c, h_c
43. c, h_c, α
44. a, h_a, h_c
45. a, w_c, γ
46. $a, t_c, \angle (a\, t_c)$
47. $c, t_c, \angle (c\, t_c)$
48. $c, t_c, h_c,$
49. $t_c, \alpha, \angle (c\, t_c)$
50. $c, \alpha, \angle (c\, t_c)$
51. $a, \beta, \angle (a\, t_c)$
52. $a, h_c, \angle (a\, t_c)$
53. $c, h_a, \angle (a\, t_c)$
54. $c, h_a, \angle (c\, t_c)$
55. $h_a, \beta, \angle (a\, t_c)$
56. $h_c, \beta, \angle (a\, t_c)$
57. $h_c, t_c, \angle (a\, t_c)$
58. $h_c, \alpha, \angle (c\, t_c)$
59. $h_a, \beta, \angle (c\, t_c)$
60. a, t_c, β
61. c, t_c, α
62. c, h_a, t_c
63. h_b, t_c, α
64. $a, c, \angle (a\, t_c)$
65. a, u, β
66. a, p, t_c
67. h_c, t_c, p
68. t_c, p, β
69. a, p, t_a
70. h_c, p, t_a
71. p, t_a, β
72. $a, p, \angle (a\, t_c)$
73. $h_c, p, \angle (a\, t_c)$
74. $p, \beta, \angle (a\, t_c)$
75. $a, p, \angle (c\, t_c)$
76. $h_c, p, \angle (c\, t_c)$
77. $a, p, \angle (c\, t_a)$
78. $h_c, p, \angle (c\, t_a)$
79. $p, \beta, \angle (c\, t_a)$
80. $a, p, \angle (a\, t_a)$
81. $h_c, p, \angle (a\, t_a)$
82. $p, \beta, \angle (a\, t_a)$
83. $h_c, \angle (c\, t_c), \angle (a\, t_c)$
84. a, h_a, p
85. a, p, u
86. a, h_c, u
87. $h_c\ p, u$
88. h_c, u, β
89. p, u, β
90. a, p, w_b
91. a, h_c, w_b
92. h_c, p, w_b
93. h_c, w_b, β
94. p, w_b, β.

d) Aufgaben, welche auf den vierten Hauptfall zurückzuführen sind.

95. a, c, t_c 96. a, w_c, u

e) In den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß $\angle (h_c\, w_c) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist.

97. a, h_c, w_c
98. h_c, w_c, α
99. h_c, w_c, γ
100. $a, w_c, \alpha - \beta$
101. $w_c, u, \alpha - \beta$
102. $a, u, \alpha - \beta$
103. h_c, p, w_c
104. $h_c, u, \alpha - \beta$
105. h_c, w_c, u
106. b, h_c, w_c
107. $p, w_c, \alpha - \beta$

f) Aufgaben, in denen zu beachten, daß $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r$ ist.

108. r, α, β
109. c, r, α
110. $c, r, \alpha - \beta$
111. r, h_c, α
112. r, p, α
113. r, p, β
114. a, h_c, r
115. r, h_c, p
116. a, r, p
117. a, c, r
118. a, r, q
119. $a, r, \alpha - \beta$

g) Aufgaben, in denen zu beachten, daß $2\triangle = c\, h_c$ ist.

120. $p, q, \triangle$
121. $h_c, p, \triangle$
122. $h_c, p - q, \triangle$

Hosted by Google

123. c, △, ∠ (c t_c)
124. h_c, △, ∠ (c t_c)
125. a, c, △
126. a, h_c, △
127. h_a, h_b, △
128. c, t_c, △
129. h_c, t_c, △
130. a, p, △
131. h_a, p, △
132. a, $h_b + h_a$, △
133. a, $h_b - h_a$, △.

h) Aufgaben, welche nach (a) gelöst werden können, aber auch einfacher mittelst der Formel $\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

134. p, q, α
135. h_a, p, q
136. h_a, p, β
137. h_a, q, β
138. h_a, p − q, β

i) In den folgenden Aufgaben, in denen t_c, oder durch die Richtung von t_c bedingte Winkel gegeben, sind die vier Hauptfälle nicht unmittelbar auf das Dreieck ABC anzuwenden, es ist zunächst eine Hülfskonstruktion zu machen, nämlich CD = t_c über D um sich selbst bis E zu verlängern, und dann zunächst △ CEB zu berechnen; in demselben ist CE = 2 t_c, BE = b, ∠ CBE = π − γ, ∠ CEB = ∠ (b t_c), ein von E auf BC gefälltes Lot ist = h_a.

139. a, t_c, γ
140. a, h_b, t_c
141. h_a, t_c, γ
142. a, h_a, ∠ (a t_c)
143. a, h_a, t_c
144. h_a, t_c, △
145. t_c, ∠(a t_c), ∠(b t_c)
146. a, ∠(a t_c), ∠(b t_c)
147. h_a, t_c, ∠ (b t_c)
148. h_a, t_c, ∠ (c t_c)
149. h_a, h_c, t_c
150. h_a, h_b, t_c
151. a, b, ∠ (a t_c)
152. a, t_c, ∠ (b t_c)
153. b, h_a ∠ (a t_c)
154. h_a, h_c, ∠ (a t_c)
155. h_a, h_b, ∠ (a t_c)
156. h_a, ∠(a t_c), ∠(b t_c)
157. h_a, ∠ (at_c), ∠(c t_c)
158. a, b, t_c

§ 12.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, besonders solche, in denen Aggregate der Seiten gegeben.

Formeln für das rechtwinklige Dreieck: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\cot\alpha = \frac{b}{a}$.

a) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat zweier Seiten und außerdem noch eine Seite gegeben; sie lassen sich sowohl trigonometrisch, wie rein algebraisch auflösen; im ersteren Fall sind zunächst die Winkel, im letzteren die Seiten zu berechnen.

1. a + b, c. 1. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{a+b}{c\sqrt{2}}$. 2. Aufl. $a = \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(a + b \mp \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}\right)$.

2. a − b, c. 1. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{a-b}{c\sqrt{2}}$. 2. Aufl. $a = \frac{1}{2}\left(a - b + \sqrt{2c^2 - (a-b)^2}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(-(a-b) + \sqrt{2c^2 - (a-b)^2}\right)$.

Hosted by Google

3. $a^2 - b^2$, c. 1. Aufl. $\cos(\pi - 2\alpha) = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$. 2. Aufl. $a = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2 + (a^2 - b^2))}$; $b = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2 - (a^2 - b^2))}$.

4. a, c + b. 1. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{c + b}{a}$. 2. Aufl. $c = \frac{(c + b)^2 + a^2}{2(c + b)}$; $b = \frac{(c + b)^2 - a^2}{2(c + b)}$.

5. a, c − b. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{c - b}{a}$. 2. Aufl. $c = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}$; $b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$.

6. p, q. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{p}{q}}$. 2. Aufl. $a = \sqrt{p(p + q)}$; $b = \sqrt{q(p + q)}$.

7. a, p − q. 1. Aufl. Aus $2p = c + p - q$ und $a^2 = cp$ ergiebt sich $c^2 + c(p - q) - 2a^2 = 0$. 2. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{p - q}{2a} \sin\alpha - \frac{1}{2} = 0$.

8. b, p. 1. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{p}{b}\cos\alpha - 1 = 0$. 2. Aufl. $q^2 + pq - b^2 = 0$.

b) Die folgenden Aufgaben, in denen ein Aggregat zweier oder dreier Linien und ein Winkel gegeben, sind dadurch zu lösen, daß man das Aggregat durch eine Seite desjenigen rechtwinkligen Dreiecks, dessen Stücke zunächst gegeben sind, und den gegebenen Winkel ausdrückt.

9. c + b, α. Aufl. $c = \frac{c + b}{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$.

10. c − b, α. Aufl. $c = \frac{c - b}{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}$.

11. a + b, α. Aufl. $c = \frac{a + b}{\sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)}$

12. a − b, α. Aufl. $c = \frac{a - b}{\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi)}$.

13. $a^2 - b^2$, α. Aufl. $c = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\cos(\pi - 2\alpha)}}$.

14. a + h, α. Aufl. $a = \frac{a + h}{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$.

15. a − h, α. Aufl. $a = \frac{a - h}{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}$.

Hosted by Google

16. $c + h$, α. Aufl. $c = \frac{2(c+h)}{2+\sin 2\alpha}$.

17. $c - h$, α. Aufl. $c = \frac{2(c-h)}{2-\sin 2\alpha}$.

18. $p - q$, α. Aufl. $h = \frac{1}{2}(p-q)\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)$.

19. $a + b + c$, α. Aufl. $c = \frac{a+b+c}{2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\alpha\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

20. $a + b - c$, α. Aufl. $c = \frac{a+b-c}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

21. $a - b + c$, α. Aufl. $c = \frac{a-b+c}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\alpha\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

c) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat der Seiten und die Höhe gegeben.

22. $a + b$, h. 1. Aufl. $\sin 2\alpha^2 - \frac{4h^2}{(a+b)^2}\sin 2\alpha - \frac{4h^2}{(a+b)^2} = 0$; oder $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)^2 - \frac{h\sqrt{2}}{a+b}\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2} = 0$. 2. Aufl. $c^2 + 2ch - (a+b)^2 = 0$.

23. $a - b$, h. 1. Aufl. $\sin 2\alpha^2 + \frac{4h^2}{(a-b)^2}\sin 2\alpha - \frac{4h^2}{(a-b)^2} = 0$; oder $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{h\sqrt{2}}{a-b}\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2} = 0$. 2. Aufl. $c^2 - 2hc - (a-b)^2 = 0$.

24. $p - q$, h. 1. Aufl. p und q aus $p - q$ und $pq = h^2$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{2h}{p-q}$.

25. $a + b + c = s$, h. 1. Aufl. $c(\sin\alpha + \cos\alpha + 1) = s$; $c(\sqrt{1+\sin 2\alpha} + 1) = s$; $ch = ab = c^2\sin\alpha\cos\alpha$ oder $2h = c\sin 2\alpha$; mithin $\frac{2h\sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha} = s - \frac{2h}{\sin 2\alpha}$, und hieraus $\sin 2\alpha = \frac{4h(s+h)}{s^2}$. 2. Aufl. $h = c\sin\alpha\cos\alpha$; $a + b + c = 2c\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\alpha\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ (siehe 19); $\frac{h}{s} = \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$; $2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) = \cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{h\sqrt{2}}{s}$ oder $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{h\sqrt{2}}{s} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2h+s}{s\sqrt{2}}$.

Hosted by Google

26. $a + b - c = d$, h. (Ähnlich wie 25.) 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{4h(h-d)}{d^2}$. 2. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{2h-d}{d\sqrt{2}}$.

27. $a - b + c = d$, h. (Ähnlich wie 25.) 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{4h(d-h)}{d^2}$. 2. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{d-2h}{d\sqrt{2}}$.

d) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat der Seiten und der Inhalt gegeben.

28. $a + b$, $\triangle$. 1. Aufl. Aus $c^2 \sin 2\alpha = 4\triangle$ und $a + b$ ergiebt sich $\sin 2\alpha = \frac{4\triangle}{(a+b)^2 - 4\triangle}$. 2. Aufl. a und b aus $a+b$ und $ab = 2\triangle$.

29. $a - b$, $\triangle$. 1. Aufl. Wie in 28: $\sin 2\alpha = \frac{4\triangle}{(a-b)^2 + 4\triangle}$. 2. Aufl. a und b aus $a - b$ und $ab = 2\triangle$.

30. $c + h$, $\triangle$. 1. Aufl. Aus $a^2 \cot\alpha = 2\triangle$ und $c + h$ ergiebt sich $\frac{(c+h)^2 \sin 2\alpha}{(2 + \sin 2\alpha)^2} = \triangle$, und hieraus $\sin 2\alpha^2 - \frac{(c+h)^2 - 4\triangle}{\triangle}$ $\sin 2\alpha + 4 = 0$. Dieselbe Formel würde man für 2β erhalten, daher gilt das eine Vorzeichen für 2α, das andere für 2β. 2. Aufl. c und h aus $c + h$ und $ch = 2\triangle$; $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$.

31. $c - h$, $\triangle$. 1. Aufl. Wie in 30: $\sin 2\alpha - \frac{(c-h^2)+4\triangle}{\triangle}$ $\sin 2\alpha + 4 = 0$. (Siehe Bemerkung zu 30, 1. Aufl.) 2. Aufl. c und h aus $c - h$ und $ch = 2\triangle$; $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$.

32. $p - q$, $\triangle$. Aufl. $\sin 2\alpha^2 + \frac{(p-q)^2}{4\triangle} \sin 2\alpha - 1 = 0$.

33. $a + b + c = s$, $\triangle$. 1. Aufl. $c(\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + 1) = s$; $2\triangle = ab$, also $4\triangle = c^2 \sin 2\alpha$; mithin $\frac{4\triangle}{\sin 2\alpha} = \frac{s^2}{2 + \sin 2\alpha + 2\sqrt{1 + \sin 2\alpha}}$ oder $8\triangle\sqrt{1 + \sin 2\alpha} = s^2 \sin 2\alpha - 8\triangle - 4\triangle \sin 2\alpha$; beide Seiten quadriert, giebt $\sin 2\alpha (s^4 - 8\triangle s^2 + 16\triangle^2) = 16\triangle s^2$ oder $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle s^2}{(s^2 - 4\triangle)^2}$. 2. Aufl. $s = 2c\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ (siehe 19), also $s^2 = 8c^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2 \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)^2$; $\triangle = 2c^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$;

Hosted by Google

also $\frac{s^2}{4\triangle} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) + \cos\frac{1}{4}\pi}{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \cos\frac{1}{4}\pi}$

mithin $\frac{s^2 + 4\triangle}{s^2 - 4\triangle} = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)}{\cos\frac{1}{4}\pi}$; also $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{s^2 + 4\triangle}{\sqrt{2}\,(s^2 - 4\triangle)}$ (§. 3, 7).

34. $a + b - c = d$, $\triangle$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle d^2}{(4\triangle - d^2)^2}$. 2. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{4\triangle + d^2}{\sqrt{2}\,(4\triangle - d^2)}$ (§. 3, 7).

35. $a - b + c = d$, $\triangle$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle d^2}{(4\triangle + d^2)^2}$. 2. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{4\triangle - d^2}{\sqrt{2}\,(4\triangle + d^2)}$ (§. 3, 7).

e) Wenn zwei Aggregate der Seiten gegeben, so erhält man leicht die Seiten aus einer quadratischen Gleichung; außerdem ergeben sich einfache Ausdrücke für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ oder $\cot\frac{1}{2}\alpha$, wie dies an der ersten Aufgabe genauer nachgewiesen ist.

36. $a + c = s$, $b + c = s'$. Aufl. Aus den gegebenen Größen und $a^2 + b^2 = c^2$ ergiebt sich: $c = s + s' - \sqrt{2ss'}$; $a = -s' + \sqrt{2ss'}$; $b = -s + \sqrt{2ss'}$. Mithin $\cos\alpha = \frac{-s + \sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; $1 - \cos\alpha = \frac{2s + s' - 2\sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; $1 + \cos\alpha = \frac{s'}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2s + s' - 2\sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}} = \frac{(\sqrt{2s} - \sqrt{s'})^2}{s'}$;

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{2s} - \sqrt{s'}}{\sqrt{s'}} = \sqrt{\frac{2s}{s'}} - 1.$

37. $c + a = s$, $c - b = d$. Aufl. $c = s + d - \sqrt{2sd}$; $a = -d + \sqrt{2sd}$; $b = s - \sqrt{2sd}$; $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{d}} - 1$.

38. $c + a = s$, $a + b = s'$. Aufl. $a = s' - s + \sqrt{2s(s - s')}$; $c = 2s - s' - \sqrt{2s(s - s')}$; $b = s - \sqrt{2s(s - s')}$; $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{s - s'}} - 1$.

39. $c + a = s$, $a - b = d$. Aufl. $a = d - s + \sqrt{2s(s - d)}$; $c = 2s - d - \sqrt{2s(s - d)}$; $b = -s + \sqrt{2s(s - d)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{s - d}} - 1$.

Hosted by Google

40. $c - a = d$, $c - b = d'$. Aufl. $a = d' + \sqrt{2\,dd'}$; $c = d + d' + \sqrt{2\,dd'}$; $b = d + \sqrt{2\,dd'}$; $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2\,d}{d'}} + 1$.

41. $a + b = s$, $c - a = d$. Aufl. $a = s + d - \sqrt{2\,d\,(s+d)}$; $c = s + 2\,d - \sqrt{2\,d\,(s+d)}$; $b = -d + \sqrt{2\,d\,(s+d)}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = 1 - \sqrt{\frac{2\,d}{s+d}}$.

42. $a - b = d$, $c - a = d'$. Aufl. $a = d + d' + \sqrt{2\,d'\,(d+d')}$; $c = 2\,d' + d + \sqrt{2\,d'(d+d')}$; $b = d' + \sqrt{2\,d'(d+d')}$; $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2\,d'}{d+d'}} + 1$.

§ 13.

Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck.

Es empfiehlt sich, alle Stücke durch die Grundseite c und einen der Winkel α oder γ auszudrücken, da sich alsdann fast alle Aufgaben entweder aus den entwickelten Formeln unmittelbar ergeben, oder durch Division zweier Formeln leicht gelöst werden können. Diese Formeln sind folgende:

1. $a = \frac{c}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c}{2 \cos \alpha}$.
2. $h_a = c \cos \frac{1}{2}\gamma = c \sin \alpha$.
3. $h_c = \frac{1}{2}\, c \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\, c \operatorname{tg} \alpha$.
4. $r = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{c}{2 \sin 2\alpha}$.
5. $a + h_c = \frac{1}{2}\, c \cot \frac{1}{4}\gamma$.
6. $a - h_c = \frac{1}{2}\, c \operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma$
7. $c + h_a = 2\, c \cos \frac{1}{4}\gamma^2$
8. $c - h_a = 2\, c \sin \frac{1}{4}\gamma^2$
9. $a + c = \frac{c\,(1 + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(1+2\cos\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{c\,(\sin\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$
$= \frac{c \sin \frac{3}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{c \sin \frac{3}{2}\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha}$.
10. $a - c = \frac{c\,(1 - 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(1 - 2\cos\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{c\,(\sin\alpha - \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$
$= -\frac{c \cos \frac{3}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{c \cos \frac{3}{2}\alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha}$.
11. $h_c + h_a = (a + c) \sin \alpha = (a + c) \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\, c \cot \frac{1}{2}\gamma$
$(1 + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\, c \operatorname{tg} \alpha\, (1 + 2 \cos \alpha) = \frac{c\,(\sin\alpha + \sin 2\alpha)}{2\cos\alpha}$
$= \frac{c \sin \frac{3}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha}$.
12. $h_c - h_a = (a - c) \sin \alpha = (a - c) \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\, c \cot \frac{1}{2}\gamma\, (1 - 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)$
$= \frac{1}{2}\, c \operatorname{tg} \alpha\, (1 - 2 \cos \alpha) = -\frac{c \cos \frac{3}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha}$.

Hosted by Google

13. $a + h_a = \frac{c\,(1 + \sin 2\,\alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{c \sin (\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2}{\cos \alpha} = \frac{c \cos (\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2}{\cos \alpha}$
$= \frac{c\,(1 + \sin \gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(\sin \frac{1}{2}\gamma + \cos \frac{1}{2}\gamma)^2}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}.$

14. $a - h_a = \frac{c\,(1 - \sin 2\,\alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{c \sin (\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2}{\cos \alpha} = \frac{c \cos (\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2}{\cos \alpha}$
$= \frac{c\,(1 - \sin \gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(\sin \frac{1}{2}\gamma - \cos \frac{1}{2}\gamma)^2}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}.$

15. $c + h_c = \frac{1}{2}\,c\,(2 + \cot \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\,c\,(2 + \operatorname{tg} \alpha).$

16. $c - h_c = \frac{1}{2}\,c\,(2 - \cot \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\,c\,(2 - \operatorname{tg} \alpha).$

17. $2\,a + c = \frac{c\,(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}.$

18. $2\,a - c = \frac{c\,(1 - \sin \frac{1}{2}\gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c\,(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}.$

19. $p = a \cos \gamma = \frac{c \cos \gamma}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}.$ 20. $q = c \cos \alpha = c \sin \frac{1}{2}\gamma.$

21. $p - q = \frac{c(\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - 3 \sin \frac{1}{2}\gamma^2)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c(1 - 4 \sin \frac{1}{2}\gamma^2)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c(1 - \cos \alpha^2).}{2 \cos \alpha}$

22. $w_a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha} = \frac{2\,c \cos \frac{1}{2}\alpha}{4 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - 1}.$

23. $u = \frac{c \sin \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \alpha \sin \frac{3}{2}\alpha} = \frac{c \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{5}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{c}{2 \cos \alpha\,(1 + 2 \cos \alpha)}$
$= \frac{c}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma\,(1 + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)}.$

24. $v = \frac{c \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha} = \frac{c}{4 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - 1} = \frac{c}{1 + 2 \cos \alpha} = \frac{c}{1 + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma}.$

25. $u - v = \frac{c\,(1 - 2 \cos \alpha)}{2 \cos \alpha\,(1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{c\,(1 - 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma\,(1 + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma)}.$

26. $t_a^2 = \frac{c^2\,(1 + 8 \sin \frac{1}{2}\gamma^2)}{8 \sin \frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{c^2\,(1 + 8 \cos \alpha^2)}{8 \cos \alpha^2}.$

27. $\triangle = \frac{1}{4}\,c^2 \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{4}\,c^2 \operatorname{tg} \alpha.$

28. $\rho = \frac{1}{2}\,c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha.$ 29. $\rho_c = \frac{1}{2}\,c \cot \frac{1}{2}\alpha.$

30. $\rho_c + \rho = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{c}{\cos \frac{1}{2}\gamma}.$ 31. $\rho_c - \rho = c \cot \alpha = c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma.$

32. $h_c - \rho = \frac{1}{2}\,c\,(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\,c \sin \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{2 \cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\right)$
$= \frac{1}{2}\,c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha\,\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha^2 + \sin \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos \alpha} = \frac{c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \alpha}.$

33. $h_c + \rho_c = \frac{1}{2}\,c\,(\operatorname{tg} \alpha + \cot \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\,c \cot \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\sin \alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha \cos \frac{1}{2}\alpha} + 1\right)$
$= \frac{1}{2}\,c \cot \frac{1}{2}\alpha\,\frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 + \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos \alpha} = \frac{c \cot \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \alpha}.$

Hosted by Google

a) Die Auflösungen der folgenden Aufgaben, welche ganz einfach sind, ergeben sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln.

1. $a + c$, α	10. v, α	19. $a + h_c$, c
2. $a - c$, α	11. $u - v$, α	20. $a - h_c$, c
3. $a + c$, $h_c + h_a$	12. t_a, γ	21. c, q
4. $a - c$, $h_c - h_a$	13. ρ, α	22. c, v
5. p, γ	14. ρ_c, α	23. c, ρ
6. q, γ	15. $\rho_c + \rho$, α	24. c, ρ_c
7. $p - q$, α	16. $\rho_c - \rho$, α	25. c, $\rho_c + \rho$
8. w_a, α	17. $h_c - \rho$, α	26. c, $\rho_c - \rho$
9. u, α	18. $h_c + \rho_c$, α	

b) Die Auflösungen der folgenden Aufgaben sind ebenfalls einfach, werden aber durch Division zweier Formeln erhalten.

27. $\triangle$, h_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\triangle}{h_c^2}$.

28. $\triangle$, h_a. Aufl. $\sin \gamma = \frac{h_a^2}{2\triangle}$.

29. $a + h_c$, $c + h_a$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{c + h_a}{2(a + h_c)}$.

30. $a - h_c$, $c - h_a$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{c - h_a}{2(a - h_c)}$.

31. a, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho_c + \rho}{2a}$.

32. a, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{h_c - \rho}{a}$.

33. a, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{cot} \frac{1}{2}\alpha = \frac{h_c + \rho_c}{a}$.

34. r, h_c. Aufl. $\cos \gamma = \frac{h_c - r}{r}$.

35. ρ, h_c. Aufl. $\cos \alpha = \frac{\rho}{h_c - \rho}$.

36. ρ_c, h_c. Aufl. $\cos \alpha = \frac{\rho_c}{h_c + \rho_c}$.

37. $\rho_c - \rho$, h_c. Aufl. $\cos 2\alpha = \frac{\rho_c - \rho - 2h_c}{\rho_c - \rho + 2h_c}$.

38. h_a, ρ. Aufl. $\cos \alpha = \frac{h_a - 2\rho}{2\rho}$.

39. h_a, ρ_c. Aufl. $\cos \alpha = \frac{2\rho_c - h_a}{2\rho_c}$.

40. h_a, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cos 2\alpha = \frac{\rho_c + \rho - 2h_a}{\rho_c + \rho}$.

Hosted by Google

41. h_a, w_a. Aufl. $\sin \frac{3}{2}\alpha = \frac{h_a}{w_a}$.

42. $\rho_c - \rho$, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{4\triangle}{(\rho_c - \rho)^2}}$.

43. $a + c$, $p - q$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{a + c - (p - q)}{2(a + c)}$.

44. $a - c$, $p - q$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{p - q - (a - c)}{2(a - c)}$.

45. $a + c$, u. Aufl. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a + c}{u}} - 1\right)$.

46. $a - c$, u. Aufl. $\cos 2\alpha = -\frac{u + 2(a - c)}{2u}$.

47. $a - c$, $u - v$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{a - c - (u - v)}{2(u - v)}$.

48. $h_c - h_a$, u. Aufl. $\sin 3\alpha = -\frac{h_c - h_a}{u}$.

49. $a + h_c$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2(a + h_c)}{2(a + h_c) + \rho_c - \rho}$.

50. $2a - c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2(a - c)}{2\rho}$.

51. $2a + c$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a + c}{2\rho_c}$.

52. $2a - c$, $h_c - \rho$. Aufl. $\sin\alpha = \frac{2a - c}{2(h_c - \rho)}$.

53. $2a + c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\sin\alpha = \frac{2a + c}{2(h_c + \rho_c)}$.

54. r, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{\rho_c + \rho}{4r}$.

55. r, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos\gamma = \frac{2r - (\rho_c - \rho)}{2r}$.

56. r, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{2r - (h_c - \rho)}{2r}$.

57. r, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{h_c + \rho_c - 2r}{2r}$.

58. r, $p - q$. Aufl. $\sin 3\alpha = -\frac{p - q}{2r}$.

59. ρ, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_c}}$ und $c = 2\sqrt{\rho\rho_c}$.

60. q, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{2q}{\rho_c + \rho}$.

Hosted by Google

61. q, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\sin\alpha = \dfrac{q}{\rho_c - \rho}$.

62. $h_c - \rho$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha = \dfrac{h_c + \rho_c - (h_c - \rho)}{h_c + \rho_c + (h_c - \rho)}$.

63. w_a, v. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{w_a}{2v}$.

64. $p - q$, $u - v$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{p-q}{u-v}} - 1\right)$.

c) Die folgenden Aufgaben, welche sich unmittelbar aus den oben aufgestellten Formeln ergeben, führen auf quadratische Gleichungen.

65. c, p. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \dfrac{p}{c}\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} = 0$.

66. c, $p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \dfrac{p-q}{2c}\cos\alpha - \frac{1}{4} = 0$.

67. c, w_a. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \dfrac{c}{2w_a}\cos\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4} = 0$.

68. c, u. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{c}{4u} = 0$.

69. c, $u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \dfrac{u-v+c}{2(u-v)}\cos\alpha - \dfrac{c}{4(u-v)} = 0$.

d) Die folgenden Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen, sind dadurch zu lösen, daß die für die beiden gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln dividiert werden.

70. $a + h_a$, $\triangle$. 1. Aufl. a und h_a zu finden aus $a + h_a$ und $ah_a = 2\triangle$. 2. Aufl. $\sin\gamma - \dfrac{a + h_a}{\sqrt{2\triangle}}\sqrt{\sin\gamma} + 1 = 0$.

71. $a - h_a$, $\triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\sin\gamma + \dfrac{a - h_a}{\sqrt{2\triangle}}\sqrt{\sin\gamma} - 1 = 0$.

72. $c + h_c$, $\triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma - \dfrac{c + h_c}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{\cot\frac{1}{2}\gamma} + 2 = 0$.

73. $c - h_c$, $\triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma + \dfrac{c - h_c}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{\cot\frac{1}{2}\gamma} - 2 = 0$.

74. a, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \dfrac{\rho_c - \rho}{2a}\cos\frac{1}{2}\gamma - 1 = 0$.

75. h_c, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \dfrac{2h_c}{\rho_c + \rho}\cos\alpha - 1 = 0$.

Hosted by Google

76. h_c, p. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{p}{2h_c}\cos\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} = 0$.

77. h_c, q. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{q}{2h_c}\sin\alpha - 1 = 0$.

78. h_c, p − q. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{p-q}{4h_c}\sin\alpha - \frac{3}{4} = 0$.

79. h_a, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_a}{\rho_c - \rho}\cos\alpha - 1 = 0$.

80. h_a, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - \frac{h_a}{2(h_c - \rho)} = 0$.

81. h_a, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \cos\alpha + \frac{h_a}{2(h_c + \rho_c)} = 0$.

82. p, △. Aufl. $\sin\gamma^2 + \frac{p^2}{2\triangle}\sin\gamma - 1 = 0$.

83. a + c, t_a. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{t_a^2}{(a+c)^2 - t_a^2}\cos\alpha + \frac{(a+c)^2 - 2t_a^2}{8((a+c)^2 - t_a^2)} = 0$.

84. a − c, t_a. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{t_a^2}{t_a^2 - (a-c)^2}\cos\alpha + \frac{2t_a^2 - (a-c)^2}{8(t_a^2 - (a-c)^2)} = 0$.

85. a + c, p. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{p}{a+c}\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{a+c-p}{2(a+c)} = 0$.

86. a − c, p. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{p}{a-c}\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{a-c-p}{2(a-c)} = 0$.

87. a + c, q. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{q}{a+c}\cos\alpha - \frac{q}{2(a+c)} = 0$.

88. a − c, q. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{q}{a-c}\cos\alpha - \frac{q}{2(a-c)} = 0$.

89. a + c, u − v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{a+c+2(u-v)}{2(u-v)}\cos\alpha - \frac{a+c-(u-v)}{4(u-v)} = 0$.

90. $h_c + h_a$, ρ. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{3\rho - (h_c + h_a)}{2\rho}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$.

91. $h_c - h_a$, ρ. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_c - h_a + \rho}{2\rho}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$.

92. $h_c + h_a$, ρ_c. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_c + h_a - \rho_c}{2\rho_c}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$.

Hosted by Google

93. $h_c - h_a$, ρ_c. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{h_c - h_a + 3\rho_c}{2\rho_c}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$.

94. $h_c + h_a$, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{h_c + h_a}{h_c - \rho} - 1\right) = 0$.

95. $h_c - h_a$, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{h_c - h_a}{h_c - \rho} - 1\right) = 0$.

96. $h_c + h_a$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{h_c + h_a}{h_c + \rho_c} - 1\right) = 0$.

97. $h_c - h_a$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_c - h_a}{h_c + \rho_c}\right) = 0$.

98. r, $a + h_c$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\frac{1}{2}\gamma - \frac{a + h_c}{2r} = 0$.

99. r, $a - h_c$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \cos\frac{1}{2}\gamma + \frac{a - h_c}{2r} = 0$.

100. $c + h_c$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^2 + 2\operatorname{tg}\alpha - \frac{2(c + h_c)}{\rho_c - \rho} = 0$.

101. $c - h_c$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^2 - 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{2(c - h_c)}{\rho_c - \rho} = 0$.

102. $2a + c$, t_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2t_a^2}{(2a + c)^2 - t_a^2}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{(2a + c)^2 - 8t_a^2}{8((2a + c)^2 - t_a^2)} = 0$.

103. $2a + c$, p. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{p}{2a + c}\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{2a + c - 2p}{2(2a + c)} = 0$.

104. $2a - c$, p. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{p}{2a - c}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{2p - (2a - c)}{2(2a - b)} = 0$.

105. $2a + c$, q. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{q}{2a + c}\cos\alpha - \frac{q}{2a + c} = 0$.

106. $2a - c$, q. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{q}{2a - c}\cos\alpha - \frac{q}{2a - c} = 0$.

107. $2a + c$, $p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{p - q}{2(2a + c)}\cos\alpha + \frac{2(p - q) - (2a + c)}{4(2a + c)} = 0$.

108. $2a - c$, $p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{p - q}{2(2a - c)}\cos\alpha + \frac{2(p - q) - (2a - c)}{4(2a - c)} = 0$.

109. $2a + c$, u. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{2a + c - u}{2u} = 0$.

Hosted by Google

110. $2a + c$, v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{2a+c}{v}\right)\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0.$

111. $2a + c$, $u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2a+c}{u-v}\right)\cos\alpha + \frac{1}{2} - \frac{2a+c}{4(u-v)} = 0.$

112. $2a - c$, u. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{2a-c-u}{2u} = 0.$

113. $2a - c$, v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \left(\frac{2a-c}{2v} - \frac{1}{2}\right)\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0.$

114. $2a - c$, $u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{2a-c+u-v}{2(u-v)}\cos\alpha + \frac{2a-c-2(u-v)}{4(u-v)} = 0.$

115. r, t_a. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{1}{4}\cos\gamma + \frac{t_a - 5r^2}{4r^2} = 0.$

116. r, ρ. Aufl. $\cos\alpha^2 - \cos\alpha + \frac{\rho}{2r} = 0.$

117. r, ρ_c. Aufl. $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - \frac{\rho_c}{2r} = 0.$

118. w_a, ρ_c. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{\rho_c}{w_a}\sin\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4} = 0.$

119. ρ_c, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{\rho_c + h_c - \rho}{h_c - \rho}\cos\alpha - \frac{\rho_c}{h_c - \rho} = 0.$

120. ρ, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{h_c + \rho_c - \rho}{h_c + \rho_c}\cos\alpha + \frac{\rho}{h_c + \rho_c} = 0.$

121. $\rho_c - \rho$, $h_c - \rho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{\rho_c - \rho}{2(h_c - \rho)}\cos\alpha - \frac{\rho_c - \rho}{2(h_c - \rho)} = 0.$

122. $\rho_c - \rho$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{\rho_c - \rho}{2(h_c + \rho_c)}\cos\alpha - \frac{\rho_c - \rho}{2(h_c + \rho_c)} = 0.$

123. q, v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{q}{2v} = 0.$

e) Die folgenden Aufgaben führen auf Gleichungen, welche durch Einführung eines Hülfswinkels nach § 3, 1 zu lösen sind.

124. a, $c + h_c$. Aufl. $2a\sin\frac{1}{2}\gamma + a\cos\frac{1}{2}\gamma = c + h_c$.

125. a, $c - h_c$. Aufl. $2a\sin\frac{1}{2}\gamma - a\cos\frac{1}{2}\gamma = c - h_c$.

126. $a + c$, h_c. Aufl. $(a + c)\cos\frac{1}{2}\gamma - 2h_c\sin\frac{1}{2}\gamma = h_c$.

127. $a - c$, h_c. Aufl. $(a - c)\cos\frac{1}{2}\gamma + 2h_c\sin\frac{1}{2}\gamma = h_c$.

128. h_a, $p - q$. Aufl. $2h_a\cos\gamma - (p - q)\sin\gamma = h_a$.

129. t_a, $\triangle$. Aufl. $t_a^2\sin\gamma + 4\triangle\cos\gamma = 5\triangle$

130. $p - q$, $h_c + h_a$. Aufl. $(p - q)\sin\alpha + 2(h_c + h_a)\cos\alpha = h_c + h_a$.

Hosted by Google

131. $p - q$, $h_c - h_a$. Aufl. $(p - q)\sin\alpha - 2(h_c - h_a)\cos\alpha = h_c - h_a$.

132. $a + h_a$, p. Aufl. $(a + h_a)\cos\gamma - p\sin\gamma = p$ oder $\cot(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{a + h_a}{p}$.

133. $a - h_a$, p. Aufl. $p\sin\gamma + (a - h_a)\cos\gamma = p$ oder $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{a - h_a}{p}$.

134. $a + h_a$, $p - q$. Aufl. $2(a + h_a)\cos\gamma - (p - q)\sin\gamma = a + h_a + p - q$.

135. $a - h_a$, $p - q$. Aufl. $2(a - h_a)\cos\gamma + (p - q)\sin\gamma = a - h_a + p - q$.

136. r, u. Aufl. $2r\sin\alpha - 2u\cos\alpha = u$.

137. $\rho_c + \rho$, v. Aufl. $\rho_c + \rho\sin\alpha - 2v\cos\alpha = v$.

f) Die Gleichungen, auf welche die folgenden Aufgaben führen, sind nach den §§. 6 und 7 zu lösen.

138. $a + h_c$, ρ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{4}\gamma = \frac{a + h_c}{\rho}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 6, 7).

139. $a - h_c$, ρ. Aufl. $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma} = \frac{\rho}{a - h_c}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 6, 9).

140. $a + h_c$, ρ_c. Aufl. $\frac{\cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{4}\gamma} = \frac{\rho_c}{a + h_c}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 6, 9).

141. $a - h_c$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma = \frac{a - h_c}{\rho_c}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 6, 7).

142. $a + h_a$, q. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)} = \sqrt{\frac{q}{a + h_a}}$; $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 7, 3).

143. $a - h_a$, q. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)} = \sqrt{\frac{q}{a - h_a}}$; $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{4}\pi$ (§ 7, 1).

g) Zur Lösung der folgenden Aufgaben, in welchen t_a eins der gegebenen Elemente ist, ist noch eine besondere Konstruktion zu machen. Es sei $AD = t_a$, $AF = h_a$, $CG = h_c$; von D sei auf AC das Lot $DE = \frac{1}{2}h_a$ und von D auf AB das Lot $DH = \frac{1}{2}h_c$ gefällt.

144. h_a, t_a. Aufl. $\sin CAD = \frac{h_a}{2t_a}$, $\sin ADB = \frac{h_a}{t_a}$, $\gamma = \angle ADB - CAD$.

145. h_c, t_a. Aufl. $\sin DAB = \frac{h_c}{2t_a}$ (1); $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DH}{BH}$, $\operatorname{tg} DAB = \frac{DH}{AH}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AH\operatorname{tg} DAB}{BH} = 3\operatorname{tg} DAB$ (2).

Hosted by Google

146. c, t_a. 1. Aufl. Ähnlich wie 144; $\cos DAB = \frac{3c}{4t_a}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg} DAH$. 2. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{c}{2\sqrt{2(t_a^2 - c^2)}}$. 3. Aufl. folgt aus Formel 26.

147. a, t_a. Aufl. Aus $\triangle ADC$ folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(t_a + \frac{1}{2}a)(t_a - \frac{1}{2}a)}{(\frac{3}{2}a + t_a)(\frac{3}{2}a - t_a)}}$.

§ 14.

Dreiecks-Aufgaben, wenn r, a, b, c, a + b, a − b, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, s − a, s − b, s − c, h_a, h_b, h_c, $h_b + h_a$, $h_b - h_a$, p, q, p − q, w_c, u, v, u − v, t_c, Δ, $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$, ab gegebene Elemente sind, und wenn dieselben nicht unmittelbar auf einen der vier Hauptfälle führen.

Zur Lösung der hierher gehörenden Aufgaben sind die obengenannten Stücke durch r und die Winkel ausgedrückt, namentlich durch γ und $\delta = \alpha - \beta$.

1. $a = 2r\sin\alpha$.
2. $b = 2r\sin\beta$.
3. $c = 2r\sin\gamma$.
4. $a + b = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta$.
5. $a - b = 2r(\sin\alpha - \sin\beta) = 4r\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta$.
6. $s = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma(\cos\frac{1}{2}\delta + \sin\frac{1}{2}\gamma)$.
7. $s - a = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma(\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\delta)$.
8. $s - b = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma(\cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\delta)$.
9. $s - c = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma(\cos\frac{1}{2}\delta - \sin\frac{1}{2}\gamma)$.
10. $h_a = 2r\sin\beta\sin\gamma$.
11. $h_b = 2r\sin\alpha\sin\gamma$.
12. $h_c = 2r\sin\alpha\sin\beta = r(\cos\delta + \cos\gamma) = 2r(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = 2r(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2)$.
13. $h_b + h_a = 2r\sin\gamma(\sin\alpha + \sin\beta) = 8r\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma^2\cos\frac{1}{2}\delta = 4r\cos\frac{1}{2}\gamma^2(\cos\alpha + \cos\beta)$.
14. $h_b - h_a = 2r\sin\gamma(\sin\alpha - \sin\beta) = 8r\sin\frac{1}{2}\gamma^2\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta = 4r\sin\frac{1}{2}\gamma^2(\cos\beta - \cos\alpha)$.
15. $p = 2r\sin\alpha\cos\beta = r(\sin\gamma + \sin\delta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

Hosted by Google

16. $q = 2\,r\,\cos\alpha\,\sin\beta = r\,(\sin\gamma - \sin\delta) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$.

17. $p - q = 2\,r\,\sin\delta$. Ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so wird q außerhalb des Dreiecks fallen und ist daher negativ zu nehmen. Zu beachten ist, daß $\dfrac{p+q}{p-q} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}$.

18. $w_c = \dfrac{h_c}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \dfrac{2\,r\,(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2)}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \dfrac{2\,r\,(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos\frac{1}{2}\delta}$
$= \dfrac{r\,(\cos\gamma + \cos\delta)}{\cos\frac{1}{2}\delta}$.

19. $u = \dfrac{2\,r\,\sin\alpha\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \dfrac{w_c\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\beta}$.

20. $v = \dfrac{2\,r\,\sin\beta\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \dfrac{w_c\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\alpha}$.

21. $u - v = 4\,r\,\sin\frac{1}{2}\gamma^2\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$.

22. $(a-b)^2 = (p-q)\,(u-v)$.

23. $t_c^2 = r^2\,(1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2)$.

24. $\triangle = \frac{1}{2}\,c\,h_c = \frac{1}{2}\,ac\,\sin\beta = \dfrac{c^2\,\sin\alpha\,\sin\beta}{2\,\sin\gamma} = 2\,r^2\,\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma = r^2\,\sin\gamma\,(\cos\gamma + \cos\delta) = 2\,r^2\,\sin\gamma\,(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = 2\,r^2\sin\gamma(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2) = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\,\cot\gamma} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$.

25. $a^2 + b^2 = c^2 + 2\,ab\,\cos\gamma = c^2 + 4\,\triangle\,\cot\gamma = \frac{1}{2}\,c^2 + 2\,t_c^2 = 4\,r^2\,(\sin\alpha^2 + \sin\beta^2) = 2\,r^2\,(2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta) = 4\,r^2\,(1 + \cos\gamma\cos\delta)$.

26. $a^2 - b^2 = 4\,r^2\,\sin\gamma\,\sin\delta = p^2 - q^2 = c\,(p-q)$.

27. $a^2 + b^2 - c^2 = 8\,r^2\,\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma = 4\,r^2\,\cos\gamma\,(\cos\gamma + \cos\delta) = 8\,r^2\,\cos\gamma\,(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = 8\,r^2\,\cos\gamma\,(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2) = 2\,ab\,\cos\gamma = 4\,\triangle\,\cot\gamma = 2\,t_c^2 - \frac{1}{2}\,c^2$.

28. $ab = 4\,r^2\,\sin\alpha\,\sin\beta = 2\,r^2\,(\cos\gamma + \cos\delta) = 4\,r^2\,(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2) = 4\,r^2\,(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = \dfrac{2\,\triangle}{\sin\gamma}$.

Außer diesen Formeln werden auch diejenigen benutzt werden, welche zur direkten Berechnung des Dreiecks in den vier Hauptfällen dienen, daher sie hier auch noch angeführt werden.

29. $\dfrac{a}{\sin a} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2\,r$.

30. $(a+b)\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = c\,\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ oder $(a+b)\,\sin\frac{1}{2}\gamma = c\,\cos\frac{1}{2}\delta$.

Hosted by Google

31. $(a - b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = c \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ oder $(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma = c \sin \frac{1}{2}\delta$.

32. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \cot \frac{1}{2}\gamma \cot \frac{1}{2}\delta$.

33. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

34. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)}{ab}}$.

35. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$.

36. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}}$.

Anmerkung. Die meisten derjenigen Aufgaben, in denen Mittellinien oder durch diese bedingte Winkel gegeben, sind in einem besonderen Paragraphen behandelt; nur einige, welche mit den hier angeführten in unmittelbarem Zusammenhang stehen, sind an dieser Stelle aufgenommen. In Bezug auf diese sei bemerkt, daß t_c, h_c und $\frac{1}{2}(p - q)$ voneinander abhängige Stücke sind, indem $t_c^2 = h_c^2 + \frac{1}{4}(p - q)^2$ ist; und daß man dadurch, daß man t_c um sich selber verlängert, ein Dreieck erhält, dessen Seiten $2t_c$, a und b sind, und in welchem $2t_c$ der Winkel $\pi - \gamma$ gegenüberliegt.

A) Unter den gegebenen Stücken befinden sich zwei Winkel; durch die aufgestellten Formeln ist leicht r zu berechnen, und durch r und die Winkel wiederum die Seiten.

1. $a + b$, α, β
2. $a - b$, α, β
3. s, α, β
4. $s - c$, α, β
5. $h_b + h_a$, α, β
6. $h_b - h_a$, α, β
7. $p - q$, α, β
8. u, α, β
9. $u - v$, α, β
10. $\triangle$, α, β
11. $a^2 + b^2$, α, β
12. $a^2 - b^2$, α, β
13. $a^2 + b^2 - c^2$, α, β
14. ab, α, β.

B) Unter den gegebenen Stücken befindet sich ein Winkel. In der Regel sind diese Aufgaben dadurch zu lösen, daß aus den für die beiden gegebenen Stücke oben aufgestellten Formeln r durch Division eliminiert wird, obwohl einzelne Aufgaben unter Berücksichtigung ihrer geometrischen Beziehungen eine einfachere Auflösung gestatten; man findet dann stets die Winkel, so daß die Aufgaben auf die entsprechenden unter A zurückgeführt sind. In vielen Aufgaben findet man die Summe oder die Differenz oder das Produkt oder den Quotienten zweier trigonometrischer Funktionen; außerdem kennt man noch die Summe oder die Differenz der Winkel, so daß die Aufgaben auf die von § 4 bis 9 zurückzuführen sind; bei einigen dieser letzteren Aufgaben ist zu beachten, daß 1) $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$;

Hosted by Google

2) $\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\delta$; 3) $\beta + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$; 4) $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \beta$; 5) $\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$; 6) $\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\delta$; 7) $\alpha - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$.

Diejenigen Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen sind noch besonders hervorgehoben.

a) In den folgenden Aufgaben ist **r** eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 49 und 50 führen auf quadratische Gleichungen. Außer **r** ist noch gegeben:

15. $a + b$, α
16. $a - b$, α
17. $a^2 + b^2$, α
18. $a^2 - b^2$, α
19. ab, α
20. $a + b$, γ
21. s, γ (20)
22. $s - c$, γ (20)
23. $a + b$, δ
24. $a - b$, γ
25. $s - c$, α (24)
26. $a - b$, δ
27. $h_b + h_a$, γ
28. $h_b - h_a$, γ
29. $p - q$, α
30. $p - q$, γ
31. w_c, δ
32. $u - v$, γ
33. $u - v$, δ
34. $a^2 + b^2$, γ
35. $a^2 + b^2$, δ
36. $a^2 - b^2$, γ
37. $a^2 - b^2$, δ
38. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
39. ab, γ
40. ab, δ
41. h_c, γ
42. h_c, δ
43. p, γ
44. p, δ
45. $\triangle$, γ
46. u, α (§ 7, 4)
47. u, γ (§ 7, 4)
48. u, δ (§ 6, 1)
49. w_c, γ
50. $a^2 + b^2 - c^2$, δ.

b) In den folgenden Aufgaben, von den 75, 76 und 77 auf quadratische Gleichungen führen, ist **c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

51. $a + b$, γ
52. $a + b$, δ
53. $a - b$, γ
54. $a - b$, δ
55. $h_b + h_a$, γ
56. $h_b + h_a$, δ
57. $h_b - h_a$, γ
58. $h_b - h_a$, δ
59. $\triangle$, α
60. $a^2 + b^2$, α
61. $a^2 + b^2$, γ
62. $a^2 - b^2$, γ
63. $a - b^2$, δ
64. ab, γ
65. h_c, γ (§ 3, 2)
66. h_c, δ (§ 3, 1)
67. w_c, δ (§ 3, 1)
68. $\triangle$, γ (§ 3, 2)
69. $\triangle$, δ (§ 3, 1)
70. $a + b$, α (§ 7, 4)
71. $a - b$, α (§ 7, 4)
72. $h_b + h_a$, α (§ 6, 6)
73. $h_b - h_a$, α (§ 6, 2)
74. $a^2 - b^2$, α (§ 7, 2)
75. w_c, γ
76. $a^2 + b^2$, δ
77. ab, δ

c) In den folgenden Aufgaben ist **a** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

78. b, δ
79. $h_b + h_a$, γ (suche $a + b$)
80. $h_b - h_a$, γ (suche $a - b$)
81. $p - q$, α
82. $p - q$, δ
83. $p - q$, β (§ 7, 2)
84. u, α (§ 7, 4).

d) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b}$ eins der gegebenen Elemente. In den Aufgaben 94 bis 96, in denen t_c oder durch t_c bedingte Winkel gegeben, ist t_a um sich selber zu verlängern und das so erhaltene Dreieck aufzulösen. In den Aufgaben 101 bis 104 sind

Hosted by Google

a und b aus quadratischen Gleichungen zu berechnen; die Aufgaben 105 bis 110 führen auf quadratische Gleichungen. Außer **a + b** ist noch gegeben:

85. $h_b + h_a$, α
86. $h_b + h_a$, δ
87. $h_b - h_a$, γ
88. $h_b - h_a$, δ
89. w_c, γ
90. $p - q$, γ
91. $p - q$, δ
92. $\triangle$, γ
93. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
94. t_c, γ (51)
95. t_c, γ_2 (70)
96. h_a, γ_2 (70)
97. $s - a$, γ (§ 3, 1)
98. h_a, δ (§ 6, 1)
99. h_a, β (§ 7, 4)
100. $p - q$, α (§ 7, 4)
101. $a^2 + b^2$, γ
102. $a^2 + b^2$, δ
103. ab, γ
104. ab, δ
105. h_c, γ
106. h_c, δ
107. w_c, δ
108. $u - v$, γ
109. $u - v$, δ
110. $a^2 + b^2 - c^2$, δ.

e) In den folgenden Aufgaben ist **a − b** eins der gegebenen Elemente. In den Aufgaben 122 bis 124 ist t_c gegeben; in denselben ist zunächst ein Dreieck aufzulösen, welches man erhält, wenn man t_c um sich selber verlängert. In den Aufgaben 133 bis 136 sind a und b aus einer quadratischen Gleichung zu berechnen; die Aufgaben 137 bis 140 führen auf quadratische Gleichungen.

111. $h_b + h_a$, γ
112. $h_b + h_a$, δ
113. $h_b - h_a$, α
114. $h_b - h_a$, δ
115. $p - q$, γ
116. $p - q$, δ
117. u, α
118. $u - v$, γ
119. $u - v$, δ
120. $\triangle$, γ
121. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
122. t_c, γ
123. t_c, γ_2
124. h_a, γ_2
125. s, γ (§ 3, 1)
126. $s - c$, γ (§ 3, 1)
127. w_c, γ (§ 3, 1)
128. h_a, δ (§ 6, 3)
129. h_a, β (§ 7, 3)
130. $p - q$, α (§ 7, 4)
131. $u - v$, α (§ 7, 4)
132. u, β (§ 7, 2)
133. $a^2 + b^2$, γ
134. $a^2 + b^2$, δ
135. ab, γ
136. ab, δ
137. h_c, γ
138. h_c, δ
139. w_c, δ
140. $a^2 + b^2 - c^2$, δ.

f) In den folgenden Aufgaben sind zwei Aggregate je zweier Seiten und ein Winkel gegeben.

141. $a + c = s$, $b + c = s'$, γ. Aufl. $c(\sin\alpha + \sin\gamma) = s \sin\gamma$ und $c(\sin\beta + \sin\gamma) = s' \sin\gamma$; also $\frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{s}{s'}$ und hieraus $\frac{\sin\alpha + \sin\beta + 2\sin\gamma}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{s + s'}{s - s'}$ oder $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{s + s'}{s - s'}$ oder $\frac{s + s'}{s - s'}$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta = 2\sin\frac{1}{2}\gamma$, woraus $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ nach § 3, 1 zu berechnen ist. Oder es ist $s' \sin\alpha - s \sin\beta = (s - s')\sin\gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, daher α und β nach § 3, 3 zu berechnen.

Hosted by Google

142. $a - c = d$, $b + c = s$, γ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \frac{s-d}{s+d} \cot \frac{1}{2}\gamma \cot \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 1). Oder $s \sin \alpha - d \sin \beta = (s + d) \sin \gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ (§ 3, 3).

143. $a - c = d$, $b - c = d'$, γ. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{d+d'}{d-d'} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 1). Oder $d' \sin \alpha - d \sin \beta = (d' - d) \sin \gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ (§ 3, 3).

g) In den folgenden Aufgaben, von denen 153 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **s** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

144. $h_b + h_a$, γ	148. h_c, γ (§ 3, 2)	151. w_c, δ (§ 3, 1)
145. w_c, γ	149. h_c, δ (§ 3, 1)	152. h_c, α (§ 7, 3)
146. $\triangle$, γ	150. $h_b - h_a$, γ (§ 3, 1)	153. $h_b - h_a$, δ.
147. ab, γ		

h) In den folgenden Aufgaben, von denen 168 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{s - c}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

154. $h_b + h_a$, γ	159. h_c, γ (§ 3, 2)	164. h_a, β (§ 7, 1)
155. w_c, γ	160. h_c, δ (§ 3, 1)	165. h_a, γ (§ 7, 3)
156. $\triangle$, α	161. $h_b - h_a$, γ (§ 3, 1)	166. h_c, α (§ 7, 5)
157. $a^2 + b^2 - c^2$, γ	162. w_c, δ (§ 3, 1)	167. p, β (§ 7, 5)
158. ab, γ	163. h_a, α (§ 6, 3)	168. $h_b - h_a$, δ.

i) In den folgenden Aufgaben, von denen 179 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{s - a}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

169. $h_b - h_a$, γ	173. h_c, δ (§ 3, 1)	177. $u - v$, δ (§ 3, 1)
170. $\triangle$, γ	174. $h_b + h_a$, δ (§ 3, 1)	178. p, β (§ 7, 1)
171. $a^2 + b^2 - c^2$, γ	175. w_c, γ (§ 3, 1)	179. $h_b + h_a$, γ.
172. ab, γ	176. w_c, δ (§ 3, 1)	

k) In den folgenden Aufgaben, von denen 196 bis 199 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{h_c}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

180. $u - v$, δ	187. $p - q$, γ (§ 3, 1)	194. u, β (§ 7, 3)
181. $\triangle$, α	188. t_c, γ	195. ab, α (§ 5, 2)
182. $\triangle$, γ	189. $p - q$, δ (§ 3, 2)	196. $h_b + h_a$, γ
183. $a^2 + b^2 - c^2$, γ	190. t_c, δ	197. $h_b - h_a$, γ
184. $a^2 + b^2 - c^2$, δ	191. $\triangle$, δ (§ 3, 1)	198. $a^2 + b^2$, γ
185. ab, γ	192. u, γ (§ 6, 3)	199. $a^2 + b^2$, δ
186. ab, δ	193. u, δ (§ 7, 1)	

Hosted by Google

l) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{h}_a$ noch gegeben:

200. u, β (269) 202. $a^2 + b^2$, β (60)
201. u − v, β (269, § 6, 7) 203. $a^2 - b^2$, β (74).

m) In den folgenden Aufgaben, von denen 212 bis 214 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{h}_b + \mathbf{h}_a$ eins der gegebenen Elemente. Die Aufgaben 206 bis 209 können dadurch einfacher gelöst werden, daß zunächst a + b aus $h_b + h_a$ und γ berechnet wird. Außer $\mathbf{h}_b + \mathbf{h}_a$ ist noch gegeben:

204. w_c, γ 208. ab, γ (103) 212. u − v, γ
205. p − q, γ 209. t_c, γ (94) 213. u − v, δ
206. $a^2 - b^2$, γ 210. △, γ 214. $a^2 + b^2 - c^2$, γ.
207. $a^2 + b^2$, γ (101) 211. u, α (§ 6, 6)

n) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{h}_b - \mathbf{h}_a$ eins der gegebenen Elemente. Die Aufgaben 218 bis 221 können dadurch einfacher gelöst werden, daß zunächst a − b aus $h_b - h_a$ und γ berechnet wird. Außer $\mathbf{h}_b - \mathbf{h}_a$ ist noch gegeben:

215. p − q, γ 219. $a^2 + b^2$, γ (133) 223. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
216. u − v, γ 220. $a^2 - b^2$, γ 224. w_c, γ (§ 3, 1)
217. u − v, δ 221. ab, γ 225. u, α (§ 6, 2)
218. t_c, γ (122) 222. △, γ 226. u − v, α (§ 6, 6).

o) In den folgenden Aufgaben, von denen 236 und 237 auf quadratische Gleichungen führen, ist **p** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

227. w_c, δ (§ 3, 1) 231. q, γ (§ 6, 9) 235. $a^2 + c^2 - b^2$, α
228. u, γ, (§ 6, 5) 232. $a^2 + c^2 - b^2$, γ 236. $a^2 - b^2$, γ
229. u, δ (§ 7, 3) 233. q, δ (§ 6, 10) 237. $a^2 - b^2$, δ.
230. u, β (§ 7, 3) 234. $a^2 + c^2 - b^2$, δ

p) In den folgenden Aufgaben, von denen 248 bis 254 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

238. w_c, δ 244. $a^2 - b^2$, γ (oder 231) 250. △, δ
239. u − v, γ 245. $a^2 - b^2$, δ (oder 233) 251. $a^2 + b^2$, γ
240. u − v, δ 246. u, δ (§ 6, 1) 252. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
241. $a^2 + b^2$, δ 247. u − v, α (§ 7, 4) 253. $a^2 + b^2 - c^2$, δ
242. ab, δ 248. t_c, γ 254. ab, γ.
243. $a^2 - b^2$, α. 249. t_c, δ

q) In den folgenden Anfgaben, von denen 264 bis 268 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{w}_c$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

255. u − v, δ 257. $a^2 + b^2 - c^2$, δ 259. ab, δ
256. $a^2 + b^2 - c^2$, γ 258. ab, γ 260. △, γ (§ 3, 2)

Hosted by Google

261. $\triangle$, δ (§ 3, 1) 264. t_c, δ (oder 189) 267. $a^2 + b^2$, γ
262. u, δ (§ 7, 1) 265. t_c, γ 268. $a^2 + b^2$, δ.
263. ab, α (§ 7, 4) 266. $u - v$, γ

r) In den folgenden Aufgaben ist **u** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

269. v, α 270. v, γ (§ 7, 1) 271. v, δ (§ 7, 2).

s) In den folgenden Aufgaben, welche sämtlich auf quadratische Gleichungen führen, ist **u** — **v** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

272. $\triangle$, γ 274. ab, γ 276. ab, δ.
273. $a^2 + b^2 - c^2$, δ 275. $a^2 + b^2 - c^2$, γ

t) In den folgenden Aufgaben ist außer Δ noch gegeben:

277. t_c, γ 280. $a^2 + b^2 - c^2$, α 283. $a^2 - b^2$, δ (§ 3, 2)
278. $a^2 + b^2$, γ 281. ab, α 284. $a^2 - b^2$, γ (§ 3, 1)
279. $a^2 + b^2 - c^2$, δ 282. ab, δ

u) In den folgenden Aufgaben, von denen 288 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{t_c}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

285. $a^2 + b^2$, α 287. ab, γ 288. ab, δ.
286. $a^2 + b^2 - c^2$, α

C) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel; jedoch kann aus zwei der gegebenen Elemente leicht ein Winkel berechnet werden, so daß sich die meisten Aufgaben auf die von B) zurückführen lassen; die betreffende Nummer ist bei jeder Aufgabe angegeben.

a) In den folgenden Aufgaben sind **a** und $\mathbf{h_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; außerdem ist gegeben:

289. s (70) 291. u (194) 292. $\triangle$.
290. $s - c$ (71)

b) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\mathbf{h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$; außerdem ist gegeben:

293. $a + b$ (70, 99) 295. u, v, h_a (200) 297. $a^2 - b^2$ (203).
294. $a - b$ (71, 129) 296. $a^2 + b^2$ (202)

c) In den folgenden Aufgaben sind **p** und $\mathbf{h_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{p}$; außerdem ist gegeben:

298. s (152) 300. $s - a$ (178) 302. t_c
299. $s - c$ (167) 301. u (194) 303 $\triangle$.

Hosted by Google

d) In den folgenden Aufgaben sind **a** und **p** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\cos\beta = \frac{p}{a}$; außerdem ist gegeben:

304 s (152)
305. s — c (167)
306. s — a (178)
307. u (194)
308. t_c
309. $\triangle$

e) In den folgenden Aufgaben sind **c** und **r** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$; außerdem ist gegeben:

310. a + b (20, 51)
311. a — b (24, 53)
312. s (21)
313. s — c (22)
314. s — a (25)
315. h_c (65, 41)
316. $h_b + h_a$ (27, 55)
317. $h_b - h_a$ (28, 57)
318. w_c (49, 75)
319. p, q, r (43, 231)
320. u, v, r (47, 270)
321. $\triangle$ (45, 68)
322. $a^2 + b^2$ (34, 61)
323. $a^2 - b^2$ (36, 62)
324. $a^2 + b^2 - c^2$ (38)
325. ab (39, 64).

f) In den folgenden Aufgaben sind **p — q** und **r** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist δ bestimmt aus $\sin\delta = \frac{p-q}{2r}$; außerdem ist gegeben:

326. a (82)
327. a + b (23, 91)
328. a — b (26, 116)
329. h_c (42, 189)
330. w_c (31, 238)
331. u (48, 246)
332. u — v (33, 240)
333. t_c (249)
334. $\triangle$ (250)
335. $a^2 + b^2$ (35, 241)
336. $a^2 - b^2$ (37, 241)
337. $a^2+b^2-c^2$(50,253)
338. ab (40, 242).

g) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h_c}$ und $\mathbf{w_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist δ bestimmt aus $\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{h_c}{w_c}$; außerdem ist gegeben:

339. c (66, 67)
340. a + b (106, 107)
341. a — b (138, 139)
342. s (149, 151)
343. s — c (160, 162)
344. s — a (173, 176)
345. p — q (189)
346. u (193)
347. u — v (180)
348. t_c (190)
349. $\triangle$ (191)
350. $a^2 + b^2$ (199)
351. $a^2 + b^2 - c^2$(184)
352. ab (186).

h) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a + b}$ und $\mathbf{h_b + h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{h_b + h_a}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

353. r (20, 27)
354. c (51, 55)
355. h_c (105, 196)
356. s — a (179)
357. p — q (90, 205)
358. w_c (89, 204)
359. u — v (108, 212)
360. t_c (94)
361. $\triangle$ (92, 210)
362. $a^2 + b^2$ (101)
363. $a^2 + b^2 - c^2$ (93)
364. ab (103)
365. a, b, $h_b + h_a$
366. a + b, h_b, h_a.

Hosted by Google

i) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a - b}$ und $\mathbf{h_b - h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{h_b - h_a}{a - b}$; außerdem ist gegeben:

367. r (24, 28)
368. c (53, 57)
369. a, b, $h_b - h_a$
370. $a - b$, h_b, h_a
371. h_c (137, 197)
372. $s - a$ (169)
373. $p - q$ (115, 215)
374. w_c (127, 224)
375. $u - v$ (118, 216)
376. t_c (122)
377. $\triangle$ (120, 222)
378. $a^2 + b^2$ (133, 219)
379. $a^2 + b^2 - c^2$ (121, 223)
380. ab (135, 221).

k) In den folgenden Aufgaben sind $\triangle$ und $\mathbf{a^2 + b - c^2}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\triangle}$; außerdem ist gegeben:

381. a (59)
382. c (68)
383. $a + b$ (92, 93)
384. $a - b$ (120, 121)
385. s (146)
386. h_c (182, 183)
387. h_a (181)
388. $h_b + h_a$ (210, 214)
389. $h_b - h_a$ (222, 223)
390. $p - q$ (252)
391. w_c (260, 256)
392. $u - v$ (272)
393. t_c (276).

l) In den folgenden Aufgaben sind $\triangle$ und $\mathbf{ab}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{2\triangle}{ab}$; außerdem ist gegeben:

394. r (39, 45)
395. c (68)
396. $a + b$ (92, 103)
397. $a - b$ (120, 135)
398. s (146, 147)
399. $s - c$ (164)
400. $s - a$ (170, 172)
401. h_c (182, 185)
402. $h_b + h_a$ (208, 210)
403. $h_b - h_a$ (221, 222)
404. $p - q$ (254)
405. w_c (258, 260)
406. $u - v$ (272, 274)
407. t_c (276, 286)
408. $a^2 + b^2$ (277)
409. $a^2 - b^2$ (283)

m) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a^2 + b^2 - c^2}$ und $\mathbf{ab}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; außerdem ist gegeben:

410. r (38, 39)
411. c (64)
412. $a + b$ (93, 103)
413. $a - b$ (121, 135)
414. s (147)
415. $s - c$ (157, 158)
416. $s - a$ (171, 172)
417. h_c (183, 185)
418. $h_b + h_a$ (208, 214)
419. $h_b - h_a$ (221, 223)
420. $p - q$ (252, 254)
421. w_c (256, 258).
422. $u - v$ (274, 275).

D) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel, auch läßt sich nicht durch einfache Division zweier gegebenen Elemente ein Winkel berechnen. Die Aufgaben können alle dadurch gelöst werden, daß aus den für die drei gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln zwei der drei unbekannten Größen, welche in der Regel

Hosted by Google

r, γ und δ sind, eliminiert werden; ist r eins der gegebenen Elemente, so sind nur zwei Formeln notwendig.

a) In den folgenden Aufgaben ist **r** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

423. h_c, $\triangle$ (318). 424. h_c, t_c (332, 336).

425. h_c, $a^2 + b^2 - c^2$. Aufl. $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\,r h_c}$.

426. w_c, ab. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta = \dfrac{ab}{2\,r\,w_c}$.

427. p, ab. Aufl. $\sin\gamma + \sin\delta = \dfrac{p}{r}$; $\cos\gamma + \cos\delta = \dfrac{ab}{2\,r^2}$ (§ 8, 1).

428. $a + b$, h_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^4 - \dfrac{2\,r + h_c}{2\,r}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \dfrac{(a+b)^2}{16\,r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{a+b}{2\,r}$; $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{h_c}{2\,r}$.

429. $a - b$, h_c. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^4 - \dfrac{2\,r - h_c}{2\,r}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \dfrac{(a-b)^2}{16\,r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin\alpha - \sin\beta = \dfrac{a-b}{2\,r}$; $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{h_c}{2\,r}$.

430. s, h_c. 1. Aufl. $h_c\,r\cos\gamma + 2\,r\sin\gamma = s^2 - h_c\,r$ (§ 3, 1).
2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \dfrac{4\,r}{s}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \dfrac{s^2 - h_c\,r}{s^2} = 0$.

431. s, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 - \dfrac{s}{r}\sin\gamma + \dfrac{h_b + h_a}{2\,r} = 0$.

432. $s - a$, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 - \dfrac{s-a}{r}\sin\gamma - \dfrac{h_b - h_a}{2\,r} = 0$.

433. $s - c$, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 + \dfrac{s-c}{r}\sin\gamma - \dfrac{h_b + h_a}{2\,r} = 0$.

434. h_c, a^2+b^2. 1. Aufl. $\cos\gamma^2 - \dfrac{h_c}{r}\cos\gamma + \dfrac{a^2+b^2-4\,r^2}{4\,r^2} = 0$.
2. Aufl. $\cos\gamma + \cos\delta = \dfrac{h_c}{r}$; $\cos\gamma\cos\delta = \dfrac{a^2+b^2-4\,r^2}{4\,r^2}$.
3. Aufl. $ab = 2\,r h_c$.

435. t_c, ab. 1. Aufl. $\cos\gamma^2 - \dfrac{ab}{r^2}\cos\gamma + \dfrac{t_c^2 - r^2}{r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta = \dfrac{4\,r^2 t_c^2 - a^2 b^2}{4\,r^4}$.

436. p, $a^2 - b^2$. Aufl. $\sin\gamma + \sin\delta = \dfrac{p}{r}$; $\sin\gamma\sin\delta = \dfrac{a^2-b^2}{4\,r^2}$.

Hosted by Google

437. $a + b$, $a^2 + b^2$ 439. $a - b$, $a^2 + b^2$ 441. $a^2 + b^2$, ab.
438. $a + b$, ab 440. $a - b$, ab

b) In den folgenden Aufgaben ist **c** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

442. h_c, t_c 444. h_c, $a^2 - b^2$ 446. w_c, $\triangle$ (339)
443. t_c, $\triangle$ 445. t_c, $a^2 - b^2$

447. h_c, $a^2 + b^2$. Aufl. $\cot\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,c\,h_c}$ (65).

448. $\triangle$, $a^2 + b^2$ (447).

449. h_c, ab. Aufl. $\sin\gamma = \dfrac{c\,h_c}{ab}$ (65).

450. $a + b$, h_c. 1. Aufl. Aus $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ und $\dfrac{2\,h_c}{a+b} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta}$ ergiebt sich, wenn man δ eliminiert, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{2\,c\,h_c}{(a+b)^2 - c^2}$. 2. Aufl. Aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}}$ und $2\,c\,h_c = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{2\,c\,h_c}{(a+b)^2 - c^2}$. 3. Aufl. $a - b = x$ gesetzt, giebt $2\,c\,h_c = \sqrt{\{(a+b)^2 - c^2\}(c^2 - x^2)}$, also $x = c\sqrt{1 - \dfrac{4\,h_c^2}{(a+b)^2 - c^2}}$.
4. Aufl. Durch c und $a + b$ ist s gegeben, mithin ρ nach § 15 Formel 11 zu berechnen, so daß die Aufgabe auf § 15, 627 zurückgeführt ist.

451. $a + b$, $\triangle$ (450).

452. $a - b$, h_c. 1. Aufl. Aus $\dfrac{2\,h_c}{a-b} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ ergiebt sich $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{c^2 - (a-b)^2}{2\,c\,h_c}$.
2. Aufl. Ähnlich wie in der 2. Aufl. 450 findet man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{c^2 - (a-b)^2}{2\,c\,h_c}$. 3. Aufl. $a + b = x$ gesetzt, giebt $4\,c^2\,h_c^2 = (x^2 - c^2)\{c^2 - (a-b)^2\}$, also $x = c\sqrt{1 + \dfrac{4\,h_c^2}{c^2 - (a-b)^2}}$.
4. Aufl. Durch c und $a - b$ ist $s - b$ gegeben, mithin ρ_b nach § 15 Formel 11 zu berechnen, so daß die Aufgabe auf § 15, 647 zurückgeführt ist.

453. $a - b$, $\triangle$ (452).

454. $a + b$, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{2\,w_c\,(a+b)}$.

Hosted by Google

455. a − b, w_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{\{c^2-(a-b)^2\}\{c^2-(a-b)^2-4w_c^2\}}{4c^2w_c^2}$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\{c^2-(a-b)^2\}^2}{4c^2w_c^2} = 0.$$

456. a + b, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\delta = \frac{(a+b)(h_b-h_a)}{c^2}$.

457. a − b, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin\delta = \frac{(a-b)(h_b+h_a)}{c^2}$.

458. a + b, t_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + 2\cos\gamma\,\frac{(a+b)^2-c^2}{4t_c^2+c^2-2(a+b)^2} - \frac{4t_c^2-c^2}{4t_c^2+c^2-2(a+b)^2} = 0.$

459. a − b, t_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + 2\cos\gamma\,\frac{c^2-(a-b)^2}{4t_c^2+c^2-2(a-b)^2} - \frac{4t_c^2-c^2}{4t_c^2+c^2-2(a-b)^2} = 0.$

459a. t_c, w_c. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{16t_c^4-8c^2t_c^2+c^4-16t_c^2w_c^2+4c^2w_c^2}{4w_c^2(4t_c^2+c^2)}$

$$\cos\gamma - \frac{16t_c^4-8c^2t_c^2+c^4}{4w_c^2(4t_c^2+c^2)} = 0.$$

460. $a+b$, a^2+b^2 462. $a-b$, a^2+b^2 464. a^2+b^2, ab.

461. $a+b$, ab 463. $a-b$, ab

c) In den folgenden Aufgaben ist außer **a** noch gegeben:

465. b, $p-q$. 466. $p-q$, t_c.

467. u, v. Aufl. $b = \frac{av}{u}$.

468. t_c, △ (473).

469. t_c, $a^2+b^2-c^2$. Aufl. $c^2 = 2\{2t_c^2-(a^2+b^2-c^2)\}$.

470. b, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{w_c(a+b)}{2ab}$.

471. b, u. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{u}{a}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{u(a+b)}{a(a-b)}$ (§ 9, 4).

472. b, u − v. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{(a+b)(u-v)}{(a-b)^2}$ (§ 9, 4).

d) In den folgenden Aufgaben ist **a + b** eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 476, 481, 501, 502, in denen t_c gegeben, ist die oben in der Anmerkung hinter den Formeln besprochene Hülfskonstruktion zu machen.

473. p, q.

474. u, v. Aufl. $a-b = \frac{(a+b)(u-v)}{c}$.

Hosted by Google

475. $p - q$, $u - v$. 1. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{a+b}{p-q}$; $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \sqrt{\frac{u-v}{p-q}}$ (§ 9, 4). 2. Aufl. $(a-b)^2 = (p-q)(u-v)$.

476. h_a, t_c. Aufl. $\sin \gamma_2 = \frac{h_a}{2 t_c}$ (70).

477. h_c, $p - q$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2 h_c (p-q)}{(a+b)^2 - (p-q)^2}$ oder ähnlich wie 453.

478. h_c, t_c (477).
479. $p - q$, t_c (477).
480. h_c, $\triangle$ (450).
481. t_c, $\triangle$ (451).

482. w_c, $\triangle$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{2 \triangle}{w_c (a+b)}$.

483. $p - q$, w_c. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{(a+b)\{(a+b)^2 - (p-q)^2\}}{2 w_c (p-q)^2} \cos \frac{1}{2}\gamma - \frac{(a+b)^2}{(p-q)^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{(a+b)^2 - (p-q)^2}{2 w_c (p-q)} \sin \frac{1}{2}\delta - 1 = 0$.

484. h_a, $a^2 + b^2$
485. h_a, ab
486. h_c, $a^2 + b^2$
487. h_c, ab
488. $h_b - h_a$, $a^2 + b^2$ (372)
489. $h_b - h_a$, ab (372)
490. p, $a^2 + b^2$
491. p, ab
492. $p - q$, $a^2 + b^2$ (465)
493. $p - q$, ab (465)
494. w_c, $a^2 + b^2$ (470)
495. w_c, ab (470)
496. u, $a^2 + b^2$ (471)
497. u, ab (471)
498. $u - v$, $a^2 + b^2$ (472)
499. $u - v$, ab (472)
500. $\triangle$, $a^2 + b^2$
501. t_c, $a^2 + b^2$
502. t_c, ab.

e) In den folgenden Aufgaben ist **a — b** eins der gegebenen Stücke; zur Lösung der Aufgaben 513, 514, 536, 537 ist die oben in der Anmerkung angegebene Konstruktion zu machen. Außer **a — b** ist noch gegeben:

503. p, q.
504. u, v (474).

505. p, $u - v$. Aufl. $q = p - \frac{(a-b)^2}{u-v}$.

506. $p - q$, u. Aufl. $v = u - \frac{(a-b)^2}{p-q}$.

507. w_c, $u - v$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)^2 - (u-v)^2}{2 w_c (u-v)}$.

508. h_c, $u - v$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)^2 - (u-v)^2}{2 h_c (u-v)}$.

Hosted by Google

509. h_c, $p-q$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q)^2-(a-b)^2}{2\,h_c\,(p-q)}$; oder ähnlich wie 452.

510. h_c, t_c (509)
511. $p-q$, t_c (509)
512. h_c, $\triangle$ (452)
513. t_c, $\triangle$ (453).

514. h_a, t_c. Aufl. $\sin\gamma_2 = \frac{h_a}{2\,t_c}$.

515. s, $p-q$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma =$
$2\,s\sqrt{\frac{(a-b)^2-(p-q)^2}{(a-b)^2(p-q+a-b)^2-4s^2(p-q)^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{a-b}{p-q}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{2\,s}{(a-b)+(p-q)}$ (§ 9, 4).

516. s, $u-v$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,s}{a-b}\sqrt{\frac{(u-v)^2-(a-b)^2}{(a-b+u-v)^2-4s^2}}$.
2. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{2\,s\,(u-v)}{(a-b)(a-b+u-v)}$ (§ 9, 4).

517. $s-c$, $p-q$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma =$
$2\,(s-c)\sqrt{\frac{(a-b)^2-(p-q)^2}{(a-b)^2\{(p-q)-(a-b)\}^2-4\,(s-c)^2\,(p-q)^2}}$.
2. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{a-b}{p-q}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{2\,s}{(p-q)-(a-b)}$ (§ 9, 4).

518. $s-c$, $u-v$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma =$
$\frac{2\,(s-c)}{a-b}\sqrt{\frac{(a-b)^2-(u-v)^2}{4\,(s-c)^2-\{(a-b)-(u-v)\}^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{2\,(s-c)\,(u-v)}{(a-b)\{(a-b)-(u-v)\}}$ (§ 9, 4).

519. h_a, a^2+b^2
520. h_a, ab
521. h_c, a^2+b^2
522. h_c, ab
523. p, a^2+b^2
524. p, ab
525. h_b+h_a, a^2+b^2 (365)
526. h_b+h_a, ab (365)
527. $p-q$, a^2+b^2 (465)
528. $p-q$, ab (465)
529. w_c, a^2+b^2 (470)
530. w_c, ab (470)
531. u, a^2+b^2 (471)
532. u, ab (471)
533. $u-v$, a^2+b^2 (472)
534. $u-v$, ab (472)
535. $\triangle$, a^2+b^2
536. t_c, a^2+b^2
537. t_c, ab.

f) In den folgenden Aufgaben ist außer **s** noch gegeben:

538. h_c, $\triangle$ (450).
539. t_c, a^2+b^2 (458).

Hosted by Google

540. w_c, $\triangle$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{\triangle}{s^2}\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\triangle}{s\,w_c}$ (§ 3, 1).

541. w_c, ab. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2s}{w_c}\cos\frac{1}{2}\gamma + \frac{s^2}{ab} = 0$.

g) Außer $\mathbf{s-c}$ ist noch gegeben:

542. h_c, $\triangle$. (450). 543. t_c, a^2+b^2 (460). 544. t_c, $a^2+b^2-c^2$ (458).

545. h_c, ab. Aufl. $\sin\gamma - \frac{h_c}{2(s-c)}\cos\gamma = \frac{h_c\{ab - 2(s-c)^2\}}{2ab(s-c)}$ (§ 3, 1) (159).

546. $h_b + h_a$, $\triangle$. Aufl. $\sin\gamma + \frac{\triangle}{(s-c)^2}\cos\gamma = \frac{(h_b+h_a)(s-c)-\triangle}{(s-c)^2}$ (§ 3, 1) (154).

547. w_c, $\triangle$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{\triangle}{(s-c)^2}\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\triangle}{w_c(s-c)}$ (§ 3, 1) (155).

h) Außer $\mathbf{s-a}$ ist noch gegeben:

548. $p-q$, $u-v$ (503). 550. t_c, a^2+b^2 (459).

549. h_c, $\triangle$ (452). 551. t_c, $a^2+b^2-c^2$ (459).

552. $h_b - h_a$, $\triangle$. Aufl. $(s-a)^2\sin\gamma + \triangle\cos\gamma = \triangle - (h_b-h_a)(s-a)$ (§ 3, 1) (169).

i) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{h_c}$ noch gegeben:

553. $p-q$, a^2-b^2 555. $\triangle$, a^2-b^2 (444) 557. a^2+b^2, ab.

554. t_c, a^2-b^2 556. $\triangle$, a^2+b^2 (447)

558. h_a, $p-q$. Aufl. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2h_c}{p-q}$ (1); $\sin\gamma_2 = \frac{h_a}{2t_c}$ (2).

559. h_a, h_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(-m+h_c+h_b)(m-h_c+h_b)}{(m+h_c+h_b)(m+h_c-h_b)}}$, wenn $m = \frac{h_b h_c}{h_a}$ ist.

560. $p-q$, $u-v$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q)(u-v)}{2h_c}$.

561. $u-v$, t_c (560).

562. $p-q$, ab. Aufl. $\sin\delta = \frac{h_c(p-q)}{ab}$.

563. t_c, ab (562).

564. $p-q$, a^2+b^2. Aufl. $\operatorname{tg}\delta = \frac{2h_c(p-q)}{(a^2+b^2)-(p-q)^2}$.

565. t_c, a^2+b^2 (564 oder 447).

566. $p-q$, $a^2+b^2-c^2$. Aufl. $\operatorname{tg}\delta = \frac{2h_c(p-q)}{4h_c^2-(a^2+b^2-c^2)}$.

Hosted by Google

567. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (566 oder 442).

568. u, v. 1. Aufl. $\cos\delta = \frac{2\,h_c}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$ und $\frac{u-v}{c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$; mithin $\cos\delta = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2} = \frac{2uv-(u^2+v^2)\cos\gamma}{u^2+v^2-2uv\cos\gamma}$; dies in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, giebt $\sin\gamma + \frac{2\,h_c}{c}\cos\gamma = \frac{h_c(u^2+v^2)}{cuv}$ (§ 3, 1). 2. Aufl. Aus $\cos\delta = \frac{2\,h_c}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$, folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta}} = \sqrt{\frac{c\cos\frac{1}{2}\gamma - 2\,h_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\,(c\sin\frac{1}{2}\gamma + 2\,h_c\cos\frac{1}{2}\gamma)}}$; hieraus und aus $\frac{u-v}{c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$ folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2\,u\,v}{c\,h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{(u-v)^2}{c^2} = 0$. 3. Aufl. Durch Elimination von γ aus den beiden Gleichungen $\frac{c}{u-v} = \cot\frac{1}{2}\gamma\cot\frac{1}{2}\delta$ und $\frac{h_c}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin\gamma}$ oder $\cos\delta = \frac{2\,h_c}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$, folgt $\sin\delta = \frac{h_c(u-v)}{uv}$.

569. u, $\triangle$ (568). 570. u − v, $\triangle$ (568).

k) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{h_a}$ noch gegeben:

571. p−q, a^2-b^2 573. t_c, $a^2+b^2-c^2$ 575. p − q, t_c (558)
572. t_c, a^2+b^2 574. u, v (269) 576. a^2+b^2, ab.

l) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{p}$ noch gegeben:

577. q, t_c 580. t_c, a^2+b^2 (577)
578. t_c, a^2-b^2 (577) 581. t_c, $a^2+b^2-c^2$ (577)
579. q, a^2+b^2 (577) 582. q, u (503).

583. q, ab. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{c^2}{ab}\cos\gamma + \frac{c^2\,p\,q}{a^2\,b^2} - 1 = 0$ (233).

m) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{p-q}$ noch gegeben:

584. $\triangle$, a^2-b^2 592. t_c, ab (562)
585. t_c, a^2-b^2 593. u, a^2-b^2 (582)
586. t_c, $\triangle$ 594. u − v, a^2-b^2 (503)
587. t_c, a^2+b^2 595. u − v, t_c (508, 509, 560)
588. t_c, $a^2+b^2-c^2$ 596. u − v, a^2+b^2 (465)
589. a^2+b^2, ab 597. u − v, ab (465)
590. a^2-b^2, $a^2+b^2-c^2$ 598. w_c, t_c (345, 348)
591. a^2-b^2, ab (583) 599. u − v, $h_b - h_a$ (373, 375).

600. w_c, u − v. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q)-(u-v)}{2\,w_c}$.

Hosted by Google

n) In den folgenden Aufgaben ist außer **u** noch gegeben:

601. v, $a^2 - b^2$ (582). 602. $a^2 + b^2$, ab (471).

603. v, t_c. 1. Aufl. Aus $\cos\delta = \frac{4\,t_c^2 \sin\gamma^2 - c^2 - c^2\cos\gamma^2}{2\,c^2\cos\gamma}$ folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{c^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - 4\,t_c^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2\,(4\,t_c^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - c^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)}$; dies in $\frac{u-v}{c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$ eingesetzt, giebt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c^4 - 4\,t_c^2\,(u-v)^2}{4\,t_c^2 - (u-v)^2}}$.

2. Aufl. Aus $\frac{u-v}{c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$ folgt $\cos\delta = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2} = \frac{c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - (u-v)^2}{c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + (u-v)^2} = \frac{2\,uv - (u^2+v^2)\cos\gamma}{u^2+v^2-2\,uv\cos\gamma}$; dies in die Formel der 1. Aufl. eingesetzt, giebt $\cos\gamma = \frac{(4\,t_c^2 - c^2)\,(u^2+v^2)}{2\,uv\,(4\,t_c^2 + c^2)}$.

604. v, $a^2 + b^2$. 1. Aufl. Wie in 603, 2. Aufl., findet man $\cos\gamma = \frac{(a^2+b^2-c^2)\,(u^2+v^2)}{2\,uv\,(a^2+b^2)}$. 2. Aufl. a und b zu berechnen, da $a^2 + b^2$ gegeben und $a : b = u : v$.

605. t_c, $a^2 + b^2$ (603, 604). 606. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (603, 604).

607. v, w_c. Ähnlich wie 603 findet man 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{4\,u^2v^2 - w_c^2\,(u-v)^2}}{c\,w_c}$. 2. Aufl. $\cos\gamma = \frac{(u^2+v^2)\,w_c^2 - 2\,u^2v^2}{2\,uv\,(w_c^2+uv)}$.

3. Aufl. Durch Elimination von γ aus den beiden Gleichungen $\frac{c}{u-v} = \cot\frac{1}{2}\gamma\cot\frac{1}{2}\delta$ und $\frac{w_c}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\delta}$ folgt $\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{w_c\,(u-v)}{2\,uv}$.

608. v, $\triangle$. Ähnlich wie 568 findet man 1. Aufl. $\sin\gamma + \frac{4\triangle}{c^2}\cos\gamma = \frac{2\triangle\,(u^2+v^2)}{c^2\,uv}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{u\,v}{\triangle}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{(u-v)^2}{c^2} = 0$. 3. Aufl. $\sin\delta = \frac{2\triangle\,(u-v)}{c\,u\,v}$.

609. v, ab. 1. Aufl. Ähnlich wie 603, 1. Aufl., findet man $\cos\frac{1}{2}\gamma = c\sqrt{\frac{ab-uv}{4\,abuv}}$; oder $\cos\gamma = \frac{c^2\,(ab-uv) - 2\,abuv}{2\,abuv}$.

2. Aufl. a und b zu berechnen, da ab gegeben und $a : b = u : v$.

610. v, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{h_b+h_a}{2\,c}$; $\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{(u-v)\,(h_b+h_a)}{2\,c^2}$, also $\cos\frac{1}{2}(\gamma \pm \delta)$ zu

Hosted by Google

finden. 2. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{h_b + h_a}{c}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$; also α und β zu finden.

611. v, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta = \frac{h_b - h_a}{2c}$; $\cos\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\delta = \frac{h_b - h_a}{2(u-v)}$, also $\cos\frac{1}{2}(\gamma \pm \delta)$ zu finden. 2. Aufl. $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{h_b - h_a}{c}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$; also α und β zu finden.

o) In den folgenden Aufgaben ist außer $\mathbf{a^2 + b^2}$ noch gegeben:

612. t_c, ab
613. w_c, ab (470)
614. u — v, ab (472)
615. u — v, t_c (603, 604)
616. t_c, $\triangle$ (443, 448).

p) Außer $\mathbf{a^2 + b^2 - c^2}$ ist noch gegeben:

617. u — v, t_c (603, 604)
618. t_c, $\triangle$ (443).

§ 15.

Dreiecks-Aufgaben, wenn Radien der Berührungskreise gegeben.

Zur Lösung der hierher gehörenden Aufgaben sind außer den in § 14 angeführten Formeln noch folgende zu benutzen, in denen wiederum $a + b + c = 2s$, also $-a + b + c = 2(s - a)$ u. s. w. und $\alpha - \beta = \delta$ ist.

1. $\rho = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = 2r \sin\frac{1}{2}\gamma (\cos\frac{1}{2}\delta - \sin\frac{1}{2}\gamma)$.
2. $\rho_a = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = 2r \cos\frac{1}{2}\gamma (\cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\delta)$.
3. $\rho_b = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = 2r \cos\frac{1}{2}\gamma (\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\delta)$.
4. $\rho_c = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = 2r \sin\frac{1}{2}\gamma (\cos\frac{1}{2}\delta + \sin\frac{1}{2}\gamma.)$
5. $\rho_c + \rho = 4r \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\delta = 2r (\cos\alpha + \cos\beta)$.
6. $\rho_c - \rho = 4r \sin\frac{1}{2}\gamma^2$.
7. $\rho_a + \rho_b = 4r \cos\frac{1}{2}\gamma^2$.
8. $\rho_a - \rho_b = 4r \cos\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta = 2r (\cos\beta - \cos\alpha)$.
9. $h_c - \rho = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\delta = 2r \cos\frac{1}{2}\delta (\cos\frac{1}{2}\delta - \sin\frac{1}{2}\gamma)$.
10. $h_c + \rho_c = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\delta = 2r \cos\frac{1}{2}\delta (\cos\frac{1}{2}\delta + \sin\frac{1}{2}\gamma)$.
11. $\triangle = \rho s = \rho_c (s - c)$.

Hosted by Google

12. $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_a} = \frac{2}{h_a}$.
13. $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_b} = \frac{2}{h_b}$.
14. $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_c} = \frac{2}{h_c}$.
15. $\frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{2}{h_a}$.
16. $\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{2}{h_b}$.
17. $\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} = \frac{2}{h_c}$.

Aus den Formeln 12 bis 17 ergeben sich Beziehungen zwischen den Radien und den Höhen, welche der besseren Übersichtlichkeit wegen in den folgenden 12 Formeln zusammengestellt sind.

18. Aus ρ und ρ_c folgt $h_c = \frac{2\rho\rho_c}{\rho_c - \rho}$.
19. Aus ρ_a und ρ_b folgt $h_c = \frac{2\rho_a\rho_b}{\rho_a + \rho_b}$.
20. Aus h_c und ρ folgt $\rho_c = \frac{h_c\rho}{h_c - 2\rho}$.
21. Aus h_c und ρ_c folgt $\rho = \frac{h_c\rho_c}{h_c + 2\rho_c}$.
22. Aus h_c und ρ_a folgt $\rho_b = \frac{h_c\rho_a}{2\rho_a - h_c}$.
23. Aus h_c und $\rho_c + \rho$ folgt $\rho_c - \rho$, nämlich: $2h_c(\rho_c - \rho) = 4\rho\rho_c = (\rho_c + \rho)^2 - (\rho_c - \rho)^2$, mithin $(\rho_c - \rho)^2 + 2h_c(\rho_c - \rho) - (\rho_c + \rho)^2 = 0$.
24. Aus h_c und $\rho_c - \rho$ folgt $\rho_c + \rho$ wie in 23: $(\rho_c + \rho)^2 = (\rho_c - \rho)(2h_c + \rho_c - \rho)$.
25. Aus h_c und $\rho_a + \rho_b$ folgt $\rho_a - \rho_b$; nämlich $2h_c(\rho_a + \rho_b) = 4\rho_a\rho_b = (\rho_a + \rho_b)^2 - (\rho_a - \rho_b)^2$; mithin $(\rho_a - \rho_b)^2 = (\rho_a + \rho_b)(\rho_a + \rho_b - 2h_c)$.
26. Aus h_c und $\rho_a - \rho_b$ folgt $\rho_a + \rho_b$ wie in 25: $(\rho_a + \rho_b)^2 - 2h_c(\rho_a + \rho_b) - (\rho_a - \rho_b)^2 = 0$.
27. Aus $h_c - \rho$ und ρ_c folgt ρ; nach 20: $\rho_c(h_c - \rho - \rho) = \rho(h_c - \rho + \rho)$ oder $\rho_c(h_c - \rho) - \rho_c\rho = \rho(h_c - \rho) + \rho^2$; mithin $\rho^2 + (h_c - \rho + \rho_c)\rho - \rho_c(h_c - \rho) = 0$.
28. Aus $h_c + \rho_c$ und ρ folgt ρ_c; nach 21: $\rho(h_c + \rho_c + \rho_c) = \rho_c(h_c + \rho_c - \rho_c)$ oder $\rho(h_c + \rho_c) + \rho\rho_c = \rho_c(h_c + \rho_c) - \rho_c^2$ oder $\rho_c^2 - (h_c + \rho_c - \rho)\rho_c + \rho(h_c + \rho_c) = 0$.
29. Aus $h_c - \rho$ und $h_c + \rho_c$ folgt ρ_c und ρ. Es ist $\frac{2}{h_c} = \frac{1}{h_c - (h_c - \rho)} - \frac{1}{(h_c + \rho_c) - h_c}$ oder $-2(h_c - (h_c - \rho))(h_c - (h_c + \rho_c)) = h_c((h_c + \rho_c) - h_c) - h_c(h_c - (h_c - \rho))$ oder $-2h_c^2 + 2h_c((h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)) - 2(h_c + \rho_c)$

Hosted by Google

$(h_c - \rho) = h_c (h_c + \rho_c) - h_c^2 - h_c^2 - h_c (h_c - \rho)$; mithin $h_c = \frac{2 (h_c + \rho_c) (h_c - \rho)}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$; und $\rho = \frac{(h_c - \rho) ((h_c + \rho_c) - (h_c - \rho))}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$; $\rho_c = \frac{(h_c + \rho_c) ((h_c + \rho_c) - (h_c - \rho))}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$; also $\rho_c + \rho = (h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)$; $\rho_c - \rho = \frac{((h_c + \rho_c) - (h_c - \rho))^2}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$.

A) Unter den gegebenen Stücken befinden sich zwei Winkel; durch die aufgestellten Formeln ist leicht r zu berechnen, und durch r und die Winkel wiederum die Seiten.

1. ρ, α, β
2. ρ_c, α, β
3. $\rho_c + \rho$, α, β
4. $\rho_c - \rho$, α, β
5. $\rho_a + \rho_b$, α, β
6. $\rho_a - \rho_b$, α, β
7. $h_c + \rho_c$, α, β
8. $h_c - \rho$, α, β.

B) Unter den gegebenen Stücken befindet sich ein Winkel; in der Regel sind diese Aufgaben dadurch zu lösen, daß die für die beiden gegebenen Linien oben aufgestellten Formeln dividiert werden. In vielen Aufgaben findet man die Summe oder die Differenz oder das Produkt oder den Quotienten zweier trigonometrischer Funktionen; außerdem kennt man noch die Summe oder die Differenz der Winkel, so daß die Aufgaben auf die von § 4 bis 9 zurückzuführen sind; bei einigen dieser letzteren Aufgaben ist zu beachten, daß $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha$; $\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha$; $\alpha - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$; $\frac{1}{2}\gamma + \alpha = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\delta$ ist.

a) In den folgenden Aufgaben, von denen 26 bis 30 auf quadratische Gleichungen führen, ist außer **r** noch gegeben:

9. ρ_a, γ
10. $\rho_c + \rho$, γ
11. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
12. $\rho_c + \rho$, α
13. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
14. $\rho_c - \rho$, α
15. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
16. $\rho_a + \rho_b$, α
17. $\rho_a - \rho_b$, γ
18. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
19. $\rho_a - \rho_b$, α
20. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
21. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$
22. ρ, γ (§ 6, 1)
23. ρ_c, γ (§ 6, 5)
24. $h_c - \rho$, α (§ 6, 3)
25. $h_c + \rho_c$, α (§ 6, 3)
26. ρ, $\alpha - \beta$
27. ρ_c, $\alpha - \beta$
28. ρ_a, $\alpha - \beta$
29. $h_c - \rho$, γ
30. $h_c + \rho_c$, γ.

b) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b + c = 2s}$ eins der gegebenen Stücke; Aufgabe 42 führt auf eine quadratische Gleichung. Außer **s** ist noch gegeben:

31. ρ_c, $\alpha - \beta$
32. ρ_c, α
33. $h_c + \rho_c$, γ
34. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$
35. ρ, γ (§ 6, 7)
36. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1)
37. $\rho_a + \rho_b$, α (§ 7, 5)
38. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 2)
39. $\rho_c + \rho$, γ
40. $\rho_a - \rho_b$, γ (§ 3, 1)
41. $h_c + \rho_c$, α (§ 7, 6)
42. $h_c - \rho$, γ.

Hosted by Google

43. $\rho_a - \rho_b$, α. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \frac{\rho_a - \rho_b}{s}$.

44. $\rho_c - \rho$, γ. Aufl. $c = \frac{\rho_c - \rho}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma}$.

45. $\rho_a + \rho_b$, γ. Aufl. $c = (\rho_a + \rho_b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$.

c) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b - c = 2\,(s - c)}$ eins der gegebenen Stücke; 62 führt auf eine quadratische Gleichung. Außer $\mathbf{s - c}$ ist noch gegeben:

46. ρ, α
47. ρ, $\alpha - \beta$
48. ρ, $\alpha - \gamma$
49. ρ_a, γ
50. ρ_a, α
51. ρ_a, $\alpha - \beta$
52. ρ_a, $\gamma - \beta$
53. $h_c - \rho$, γ
54. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
55. ρ_c, γ (§ 6, 7)
56. ρ_c, α (§ 6, 9)
57. $\rho_a + \rho_b$, α (§ 7, 3)
58. $h_c - \rho$, α (§ 7, 6)
59. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1)
60. $\rho_a - \rho_b$, γ (§ 3, 1)
61. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 2)
62. $h_c + \rho_c$, γ.

63. $\rho_c + \rho$, γ. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho_c + \rho}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma\,(s - c)} - 1$. (§. 6, 11.)

64. $\rho_c - \rho$, γ. Aufl. $c = (\rho_c - \rho) \cot \frac{1}{2}\gamma$.

65. $\rho_a + \rho_b$, γ. Aufl. $c = (\rho_a + \rho_b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$.

66. $\rho_a - \rho_b$, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho_a - \rho_b}{s - c} + \cot \frac{1}{2}\alpha$.

d) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{s - a}$ eins der gegebenen Stücke. Außer $\mathbf{s - a}$ ist noch gegeben:

67. $\rho_c - \rho$, γ
68. $\rho_a + \rho_b$, γ
69. $\rho_a - \rho_b$, γ
70. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
71. $\rho_c + \rho$, γ (§ 3, 1)
72. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1).

e) In den folgenden Aufgaben, von denen 93 und 94 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{c}$ eins der gegebenen Stücke. Außer $\mathbf{c}$ ist noch gegeben:

73. $\rho_c + \rho$, γ
74. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
75. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
76. $\rho_c - \rho$, α
77. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
78. $\rho_a + \rho_b$, α
79. $\rho_a - \rho_b$, γ
80. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
81. ρ, γ (§ 6, 1)
82. ρ, $\alpha - \beta$ (§ 6, 2)
83. ρ, α (§ 7, 3)
84. ρ_c, γ (§ 6, 5)
85. ρ_c, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1)
86. ρ_c, α (§ 7, 5)
87. ρ_a, γ (§ 6, 3)
88. ρ_a, $\alpha - \beta$ (§ 6, 4)
89. ρ_a, α (§ 7, 3)
90. ρ_a, β (§ 7, 1)
91. $\rho_c + \rho$, α (§ 7, 3)
92. $\rho_a - \rho_b$, α (§ 7, 3)
93. $h_c - \rho$, γ
94. $h_c + \rho_c$, γ.

f) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a}$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

95. $\rho_c - \rho$, α
96. $\rho_c - \rho$, γ
97. $\rho_a + \rho_b$, α
98. $\rho_a + \rho_b$, γ
99. $\rho_c + \rho$, γ (§ 7, 4)
100. $\rho_a - \rho_b$, γ (§ 7, 4)
101. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$ (§ 7, 1)
102. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 7, 1)
103. $\rho_c + \rho$, α (§ 3, 2)

Hosted by Google

104. $\rho_c + \rho$, β (§ 3, 1) 105. $\rho_a - \rho_b$, α (§ 3, 2) 106. $\rho_a - \rho_b$, β (§ 3, 1).

g) In den folgenden Aufgaben, von denen 125 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{a + b}$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

107. ρ, γ
108. ρ_c, γ
109. $\rho_c + \rho$, α
110. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
111. $\rho_c - \rho$, γ
112. $\rho_a + \rho_b$, γ
113. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
114. $\rho_a - \rho_b$, γ
115. $\rho_a - \rho_b$, α
116. ρ_a, γ (§ 3, 1)
117. ρ_a, $\alpha - \beta$ (§ 3, 2)
118. $h_c - \rho$, γ (§ 3, 2)
119. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1)
120. $h_c + \rho_c$, γ (§ 3, 2)
121. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$ (§ 3, 1)
122. $h_c - \rho$, α (§ 7, 3)
123. $h_c + \rho_c$, α (§ 7, 6)
124. $\rho_a + \rho_b$, α (§ 7, 3)
125. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$.
126. ρ_a, α (§ 7, 5)
127. ρ_a, β (§ 7, 6).

h) In den folgenden Aufgaben, von denen 140 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{a - b}$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

128. $\rho_c + \rho$, γ
129. $\rho_c + \rho$, α
130. $\rho_c - \rho$, γ
131. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
132. $\rho_c - \rho$, α
133. $\rho_a + \rho_b$, γ
134. $\rho_a - \rho_b$ $\alpha - \beta$
135. $\rho_a - \rho_b$, α
136. ρ, γ (§ 3, 1)
137. ρ, $\alpha - \beta$ (§ 3, 2)
138. ρ_c, γ (§ 3, 1)
139. ρ_c, $\alpha - \beta$ (§ 3, 2)
140. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$.

141. ρ, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta = \cot \frac{1}{2}\alpha + \frac{a - b}{\rho}$.

142. ρ_c, α. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \frac{a - b}{\rho_c}$.

143. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{(a - b)\cos \frac{1}{2}\delta^2}{2(h_c - \rho)\sin \frac{1}{2}\delta + (a - b)\cos \frac{1}{2}\delta}$, wo der Nenner, wie auch in 144 und 145 nach § 3, 2 zu berechnen ist.

144. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{(a - b)\cos \frac{1}{2}\delta^2}{2(h_c + \rho_c)\sin \frac{1}{2}\delta - (a - b)\cos \frac{1}{2}\delta}$.

145. ρ_a, γ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{(a - b)\cos \frac{1}{2}\gamma^2}{2\rho_a \sin \frac{1}{2}\gamma - (a - b)\cos \frac{1}{2}\gamma}$.

i) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{h_c}$ eins der gegebenen Stücke. In den Aufgaben 146 bis 149 ist $h_c - \rho$ oder $h_c + \rho_c$ durch ρ resp. ρ_c zu dividieren; 156 bis 159 führen auf quadratische Gleichungen. Außer $\mathbf{h_c}$ ist noch gegeben:

146. ρ, γ
147. ρ, $\alpha - \beta$
148. ρ_c, γ
149. ρ_c, $\alpha - \beta$
150. ρ, α (§ 7, 4 oder 5)
151. ρ_c, α (§ 7, 4 oder 5)
152. ρ_a, γ (§ 6, 3)
153. ρ_a, $\alpha - \beta$ (§ 6, 4)
154. ρ_a, α (§ 7, 6)
155. ρ_a, β (§ 7, 5)
156. $\rho_c + \rho$, γ
157. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
158. $\rho_a - \rho_b$, γ
159. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$.

Hosted by Google

160. $\rho_c + \rho$, α. Aufl. $(\rho_c + \rho) \sin\alpha \sin\beta - h_c \cos\beta = h_c \cos\alpha$ (§ 3, 1).

161. $\rho_a - \rho_b$, α. Aufl. $h_c \cos\beta - (\rho_a - \rho_b) \sin\alpha \sin\beta = h_c \cos\alpha$ (§ 3, 1).

162. $\rho_c - \rho$, γ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta^2 = \dfrac{(\rho_c - \rho + 2h_c)\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\rho_c - \rho}$.

163. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$. Aufl. wie 162.

164. $\varrho_a + \varrho_b$. γ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta^2 = \dfrac{(\varrho_a + \varrho_b - 2h_c)\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{\varrho_a + \varrho_b}$.

165. $\varrho_a + \varrho_b$, $\alpha - \beta$. Aufl. wie 164.

166. $\varrho_c - \varrho$, α. Aufl. $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \sqrt{\dfrac{\varrho_c - \varrho + 2h_c}{\varrho_c - \varrho}}$ (§ 7, 5).

167. $\varrho_a + \varrho_b$, α. Aufl. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \sqrt{\dfrac{\varrho_a + \varrho_b - 2h_c}{\varrho_a + \varrho_b}}$ (§ 7, 1).

k) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{h}_a$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

168. $\varrho_c - \varrho$, γ
169. $\varrho_c - \varrho$, β
170. $\varrho_a + \varrho_b$, γ
171. $\varrho_a + \varrho_b$, β
172. $\varrho_c + \varrho$, γ (§ 7, 3)
173. $\varrho_c + \varrho$, $\alpha - \beta$ (§ 6, 3)
174. $\varrho_a - \varrho_b$, γ (§ 7, 1)
175. $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$ (§ 6, 1).

l) In den folgenden Aufgaben, von denen 189 bis 191 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{h}_b + \mathbf{h}_a$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

176. ϱ, γ
177. ϱ_c, γ
178. $\varrho_c - \varrho$, γ
179. $\varrho_c + \varrho$, $\alpha - \beta$
180. $\varrho_c + \varrho$, α
181. $\varrho_a + \varrho_b$, γ
182. $\varrho_a + \varrho_b$, $\alpha - \beta$
183. $\varrho_a - \varrho_b$, γ
184. $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$
185. $h_c - \varrho$, γ
186. $h_c + \varrho_c$, γ
187. $\varrho_a + \varrho_b$, α (§ 6, 4)
188. ϱ_a, γ (§ 3, 1)
189. ϱ, $\alpha - \beta$
190. ϱ_c, $\alpha - \beta$
191. $\varrho_c - \varrho$, $\alpha - \beta$.

m) In den folgenden Aufgaben, von denen 204 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{h}_b - \mathbf{h}_a$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

192. ϱ_a, γ
193. $\varrho_c - \varrho$, γ
194. $\varrho_c - \varrho$, $\alpha - \beta$
195. $\varrho_c + \varrho$, γ
196. $\varrho_c + \varrho$, $\alpha - \beta$
197. $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$
198. $\varrho_a - \varrho_b$, α
199. $\varrho_a + \varrho_b$, γ
200. $\varrho_a + \varrho_b$, $\alpha - \beta$
201. $\varrho_c - \varrho$, α (§ 6, 4)
202. ϱ, γ (§ 3, 1)
203 ϱ_c, γ (§ 3, 1)
204. ϱ_a, $\alpha - \beta$.

n) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{w}_c$ eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 215 bis 222 führen auf quadratische Gleichungen. Außer $\mathbf{w}_c$ ist noch gegeben:

205. ϱ, γ
206. ϱ, $\alpha - \beta$
207. ϱ_c, γ

Hosted by Google

208. ϱ_c, $\alpha - \beta$
209. ϱ_a, $\alpha - \beta$
210 $\varrho_c + \varrho$, γ
211. $\varrho_c - \varrho$, $\alpha - \beta$
212. $\varrho_a + \varrho_b$, $\alpha - \beta$
213. $h_c - \varrho$, $\alpha - \beta$
214. $h_c + \varrho_c$, $\alpha - \beta$
215. ϱ, α
216. ϱ_c, α
217. $\varrho_c + \varrho$, $\alpha - \beta$
218. $\rho_c - \rho$, γ
219. $\rho_a + \rho_b$, γ
220. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
221. $h_c - \rho$, γ
222. $h_c + \rho_c$, γ
223. ρ_a, γ (§ 3, 1).

224. $\rho_a - \rho_b$, γ. Aufl. $2\, w_c \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \delta - (\rho_a - \rho_b) \cos \delta = (\rho_a - \rho_b) \cos \gamma$ (§ 3, 1).

o) In den folgenden Aufgaben, von denen 233 bis 235 auf quadratische Gleichungen führen, ist **p** — **q** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist noch gegeben:

225. $\rho_c + \rho$, γ
226. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
227. $\rho_c - \rho$, γ
228. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
229. $\rho_a + \rho_b$, γ
230. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
231. $\rho_a - \rho_b$, γ
232. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
233. ρ, $\alpha - \beta$
234. ρ_c, $\alpha - \beta$
235. ρ_a, $\alpha - \beta$
236. $\rho_c + \rho$, α (§ 7, 2)
237. $\rho_c + \rho$, β (§ 7, 1)
238. $\rho_a - \rho_b$, α (§ 7, 6)
239. $\rho_a - \rho_b$, β (§ 7, 5)
240. $h_c - \rho$, α (§ 7, 1)
241. $h_c + \rho_c$, α (§ 7, 3)

242. $h_c - \rho$, γ. Aufl. $(p - q) \cos \frac{1}{2}\delta - 2 (h_c - \rho) \sin \frac{1}{2}\delta = (p - q) \sin \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 1).

243. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$. Aufl. wie 242 (§ 3, 2).

244. $h_c + \rho_c$, γ. Aufl. $2 (h_c + \rho_c) \sin \frac{1}{2}\delta - (p - q) \cos \frac{1}{2}\delta = (p - q) \sin \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 1).

245. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$. Aufl. wie 244 (§ 3, 2).

p) In den folgenden Aufgaben, von denen 254 bis 257 auf quadratische Gleichungen führen, ist **u** — **v** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist noch gegeben:

246. ρ, $\alpha - \beta$
247. ρ_c, $\alpha - \beta$
248. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
249. $\rho_c - \rho$, γ
250. $\rho_c - \rho$, α
251. $\rho_a + \rho_b$, γ
252. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
253. $\rho_a - \rho_b$, γ
254. $\rho_c + \rho$, γ
255. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
256. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
257. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$.

q) In den folgenden Aufgaben ist Δ eins der gegebenen Stücke; die außerdem noch gegebene Strecke ist zu quadrieren und durch Δ zu dividieren. Außer Δ ist noch gegeben:

258. $\rho_c + \rho$, γ
259. $\rho_c - \rho$, γ
260. $\rho_a + \rho_b$, γ
261. $\rho_a - \rho_b$, γ
262. ρ, γ (§ 6, 7)
263. ρ_c, γ (§ 6, 7)
264. ρ_c, α (§ 6, 9).

r) In den folgenden Aufgaben ist ϱ eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 268 bis 270 führen auf quadratische Gleichungen. Außer ϱ ist noch gegeben:

265. ρ_a, γ
266. $\rho_a + \rho_b$, γ (§ 6, 1)
267. $\rho_a - \rho_b$, γ (§ 3, 1)
268. $h_c + \rho_c$, γ
269. $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$.

Hosted by Google

270. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_a + \rho_b)\cos\frac{1}{2}\delta}{\rho_a + \rho_b - 2\rho}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{2\rho}{\rho_a + \rho_b - 2\rho} = 0.$

271. ρ_c, γ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{(\rho_c + \rho)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\rho_c - \rho}$.

272. ρ_c, $\alpha - \beta$. Aufl. wie 271.

s) In den folgenden Aufgaben, von denen 276 bis 278 auf quadratische Gleichungen führen, ist ϱ_c eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

273. ρ_a, γ — 275. $\rho_a - \rho_b$, γ (§ 3, 1) — 277. $h_c - \rho$, γ
274. $\rho_a + \rho_b$, γ (§ 6, 5) — 276. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$ — 278. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$.

t) In den folgenden Aufgaben, von denen 283 auf eine quadratische Gleichung führt, ist ϱ_a eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

279. ρ_b, γ (§ 6, 9) — 281. $\rho_c - \rho$, γ (§ 6, 3) — 283. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$.
280. ρ_b, $\alpha - \beta$ (§ 6, 10) — 282. $\rho_c + \rho$, γ (§ 3, 1)

u) In den folgenden Aufgaben, von denen 288 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\varrho_c + \varrho$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

284. $\rho_a + \rho_b$, γ — 286. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ — 288. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$.
285. $\rho_a - \rho_b$, γ — 287. $\rho_a - \rho_b$, α (§ 6, 10)

v) In den folgenden Aufgaben, von denen 293 bis 297 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\varrho_c - \varrho$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

289. ϱ_a, γ — 292. $\varrho_a - \varrho_b$, γ — 295. $h_c - \varrho$, $\alpha - \beta$
290. $\varrho_a + \varrho_b$, $\alpha - \beta$ — 293. $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$ — 296. $h_c + \varrho_c$, γ
291. $\varrho_a + \varrho_b$, α — 294. $h_c - \varrho$, γ — 297. $h_c + \varrho_c$, $\alpha - \beta$.

w) In den folgenden Aufgaben sind $h_c - \varrho$ und $h_c + \varrho_c$ die gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

298. γ. — 299. $\alpha - \beta$ — 300. α.

C) Unter den gegebenen Stücken befindet sich kein Winkel, jedoch kann aus zwei der gegebenen Stücke leicht ein Winkel berechnet werden, so daß sich die meisten Aufgaben auf die von **B** zurückführen lassen.

a) In den folgenden Aufgaben sind **c** und **r** die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$; außerdem ist noch gegeben:

301. ϱ (22) — 304. $\varrho_c + \varrho$ (10) — 306. $h_c - \varrho$ (29)
302. ϱ_c (23) — 305. $\varrho_a - \varrho_b$ (17) — 307. $h_c + \varrho_c$ (30).
303. ϱ_a (9)

Hosted by Google

b) In den folgenden Aufgaben sind ϱ_c und **s** die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho_c}{s}$; außerdem ist gegeben:

308. a (89)
309. c (84)
310. r (23)
311. h_c (148)
312. $h_b + h_a$ (177)
313. $h_b - h_a$ (203)
314. w_c (207)
315. ϱ (35, 271)
316. $\triangle$ (315)
317. ϱ_c, ϱ, $\triangle$ (315)
318. ϱ_a (273)
319. $\varrho_a + \varrho_b$ (45, 274)
320. $\varrho_a - \varrho_b$ (40, 275)
321. $h_c - \varrho$ (42, 277).

c) In den folgenden Aufgaben sind ϱ und $\mathbf{s - c}$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s - c}$; außerdem ist gegeben:

322. a (83)
323. c (81)
324. r (22)
325. h_c (146)
326. $h_b + h_a$ (176)
327. $h_b - h_a$ (202)
328. w_c (205)
329. ϱ_a (49, 265)
330. ϱ_c (55, 271)
331. $\triangle$ (330)
332. $\varrho_a + \varrho_c$ (65, 266)
333. $\varrho_a - \varrho_b$ (60, 267)
334. $h_c + \varrho_c$ (62, 268).

d) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{s - c}$ und ϱ_a die gegebenen Stücke; durch dieselben ist β bestimmt aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{s - c}{\varrho_a}$; außerdem ist gegeben:

335. a (86)
336. c (90)
337. r (9)
338. h_c (155)
339. h_a (151)
340. h_b (152)
341. w_b (223)
342. ϱ (46, 265)
343. ϱ_c (56, 279)
344. $\triangle$ (343)
345. ϱ_a, ϱ_c, $\triangle$ (343)
346. ϱ_b (50, 273)
347. $h_c - \varrho$ (58).

e) In den folgenden Aufgaben sind **b** und $\mathbf{h_a}$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$; außerdem ist gegeben:

348. ϱ (83, 150)
349. ϱ_c (89, 154)
350. ϱ_a (90, 151)
351. $\varrho_c + \varrho$ (99, 172)
352. $\varrho_c - \varrho$ (96, 168)
353. $\varrho_a + \varrho_b$ (98, 170)
354. $\varrho_a - \varrho_b$ (100, 174).

f) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho_c - \varrho}{c}$; außerdem ist gegeben:

355. a
356. h_a
357. h_c (162, § 14, 65)
358. $\triangle$ (357)
359. $\triangle, h_c, \varrho_c - \varrho$ (357)
360. $a + b$ (111)
361. $a - b$ (130))
362. $h_b + h_a$ (178)
363. $h_b - h_a$ (193)
364. $\varrho_c - \varrho$, p, q (227)
365. $\varrho_c - \varrho$, u, v (249)
366. w_c (218, § 14, 75)

Hosted by Google

367. t_c (§ 16, 97) 369. ρ_a (87, 281) 371. $h_c - \rho$ (93, 294)
368. c, ρ, ρ_c (81, 84) 370. $\rho_a - \rho_b$ (79, 292) 372. $h_c + \rho_c$ (94, 296).

g) In den folgenden Aufgaben sind **r** und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_c - \rho}{r}}$; außerdem ist gegeben:

373. a 381. $h_b + h_a$ (178) 388. ρ_a (9, 281)
374. h_a 382. $h_b - h_a$ (193) 389. $\rho_a - \rho_b$ (17, 292)
375. $a + b$ (111) 383. u (§ 14, 47) 390. $h_c - \rho$ (29, 294)
376. $a - b$ (130) 384. $u - v$ (249) 391. $h_c + \rho_c$ (30, 296)
377. $s - a$ (67) 385. w_c (218, § 14, 75) 392. s (44)
378. p (§ 14, 43) 386. t_c (§ 16, 97) 393. $s - c$ (64)
379. $p - q$ (227) 387. r, ρ, ρ_c (22, 23) 394. $s - a$ (67).
380. h_c (162)

h) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{c}{\rho_a + \rho_b}$; außerdem ist gegeben:

395. a 402. $h_b + h_a$ (181) 408. ρ (81, 266)
396. h_a 403. $h_b - h_a$ (199) 409. ρ_c (84, 274)
397. $a + b$ (112) 404. $\rho_a + \rho_b$, p, q (229) 410. c, ρ_a, ρ_b (79, 279)
398. $a - b$ (133) 405. t_c (§ 16, 95) 411. $\rho_c + \rho$ (73, 284)
399. h_c (164) 406. w_c (219) 412. $h_c - \rho$ (93)
400. $\triangle$ (399) 407. $\rho_a + \rho_b$, u, v (251) 413. $h_c + \rho_c$ (94).
401. $\triangle, h_c, \rho_a + \rho_b$ (399)

i) In den folgenden Aufgaben sind **r** und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_a + \rho_b}{r}}$; außerdem ist gegeben:

414. a 422. p (§ 14, 43) 430. ρ_c (23, 274)
415. h_a 423. $p - q$ (229) 431. $\rho_c + \rho$ (10, 284)
416. $a + b$ (112) 424. u (§ 14, 47) 432. $h_c - \rho$ (29)
417. $a - b$ (133) 425. $u - v$ (251) 433. $h_c + \rho_c$ (30)
418. h_c (164) 426. t_c (§ 16, 97) 434. s (45)
419. $\triangle, r, \rho_a + \rho_b$ (418) 427. w_c (219) 435. $s - a$ (68)
420. $h_b + h_a$ (181) 428. ρ (22, 266) 436. $s - c$ (65).
421. $h_b - h_a$ (199) 429. r, ρ_a, ρ_b (9, 279)

k) In den folgenden Aufgaben sind $\varrho_c - \varrho$ und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}}$; außerdem ist gegeben:

Hosted by Google

437. a (96, 98)
438. a + b (111, 112)
439. a − b (128, 133)
440. h_c (162, 164)
441. h_a (168, 170)
442. $h_b + h_a$ (178, 181)
443. $h_b - h_a$ (193, 199)
444. w_c (218, 219)
445. p − q (227, 229)
446. u − v (249, 251)
447. s (44, 45)
448. s − c (64, 65)
449. s − a (67, 68)
450. $\rho, \rho_c, \rho_a + \rho_b$ (266, 271)
451. $\rho_c - \rho, \rho_a, \rho_b$ (279, 281)
452. $h_c - \rho$ (294)
453. $h_c + \rho_c$ (296)
454. p (422)
455. u (424)
456. t_c (426).

l) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a + b}$ und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho_c + \rho}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

457. a, b, $\rho_c + \rho$
458. c (73)
459. t_c (§ 14, 96)
460. r (10)
461. h_c (156)
462. $h_b - h_a$ (195)
463. w_c (210)
464. p − q (225)
465. u − v (254)
466. a + b, ρ, ρ_c (111, 271)
467. ρ_a (116, 282)
468. $\rho_a + \rho_b$ (112, 284)
469. $\rho_a - \rho_b$ (114, 285)
470. $h_c - \rho$ (118, 298).

m) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a - b}$ und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{a - b}{\rho_a - \rho_b}$; außerdem ist gegeben:

471. a, b, $\rho_a - \rho_b$
472. c (79)
473. r (17)
474. t_c (§ 14, 124)
475. h_c (158)
476. $h_b + h_a$ (183)
477. w_c (224)
478. p − q (231)
479. u − v (253)
480. ρ (267)
481. ρ_c (275)
482. a − b, ρ_a, ρ_b (133, 279)
483. $\rho_c + \rho$ (128, 285)
484. $\rho_c - \rho$ (130, 292).

n) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a + b}$ und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{\rho_a - \rho_b}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

485. c (80)
486. r (18)
487. h_c (159)
488. h_a (175)
489. $h_b + h_a$ (184)
490. $h_b - h_a$ (197)
491. w_c (220)
492. p − q (232)
493. u − v (255)
494. a + b, ρ_a, ρ_b (113, 280)
495. $\rho_c + \rho$ (110, 286)
496. $\rho_c - \rho$ (125, 293)
497. $h_c - \rho$ (119)
498. $h_c + \rho_c$ (121).

o) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a - b}$ und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Elemente, durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{a - b}{\rho_c + \rho}$; außerdem ist gegeben:

Hosted by Google

499. c (74)
500. r (11)
501. h_c (157)
502. h_a (173)
503. $h_b + h_a$ (179)
504. $h_b - h_a$ (196)
505. w_c (217)
506. p – q (226)
507. u – v (248)
508. a – b, ρ, ρ_c (131, 272)
509. $\rho_a + \rho_b$ (140, 288)
510. $\rho_a - \rho_b$ (134, 286)
511. $h_c - \rho$ (143, 299).

p) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h_b + h_a}$ und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{h_b + h_a}{2(\rho_c + \varrho)}}$; außerdem ist gegeben:

512. a (99)
513. a – b (128)
514. c (73)
515. r (10)
516. s (39)
517. s – c (63)
518. s – a (71)
519. h_c (156)
520. t_c (459)
521. w_c (210)
522. p – q (225)
523. u – v (254)
524. △ (258)
525. $\rho_c + \rho$, h_a, h_b
526. ρ, ρ_c, $h_b + h_a$ (271)
527. ρ_a (282)
528. $\rho_a + \rho_b$ (284)
529. $\rho_a - \rho_b$ (285).

q) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h_b - h_a}$ und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{h_b - h_a}{2(\rho_a - \rho_b)}}$; außerdem ist gegeben:

530. a (100)
531. a + b (114)
532. c (79)
533. r (17)
534. s (40)
535. s – c (60)
536. s – a (69)
537. h_c (158)
538. t_c (474)
539. w_c (224)
540. p – q (231)
541. u – v (253)
542. △ (261)
543. $\rho_a - \rho_b$, h_a, h_b
544. ρ_a, ρ_b, $h_b - h_a$ (199)
545. ρ (267)
546. ρ_c (275)
547. $\rho_c + \rho$ (285)
548. $\rho_c - \rho$ (292).

r) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a + b}$ und $\mathbf{h_b + h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{h_b + h_a}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

549. ρ (107, 176)
550. ρ_c (108, 177)
551. ρ_a (116, 188)
552. $\rho_c - \rho$ (111, 178)
553. $\rho_a + \rho_b$ (112, 181)
554. $\rho_a - \rho_b$ (114, 183)
555. $h_c - \rho$ (118, 185)
556. $h_c + \rho_c$ (120, 186).

s) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a - b}$ und $\mathbf{h_b - h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{h_b - h_a}{a - b}$; außerdem ist gegeben:

557. ρ (136, 202)
558. ρ_c (138, 203)
559. ρ_a (145, 192)
560. $\rho_c - \rho$ (130, 193)
561. $\rho_c + \rho$ (128, 195)
562. $\rho_a + \rho_b$ (133, 199)

t) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{u - v}$ und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen

Hosted by Google

Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{u - v}{\rho_c - \rho}$; außerdem ist gegeben:

563. r (13)
564. $a + b$ (125)
565. $a - b$ (131)
566. h_c (163)
567. $h_b + h_a$ (191)
568. $h_b - h_a$ (194)
569. $p - q$ (228)
570. $u, v, \rho_c - \rho$ (75)
571. w_c (211)
572. $u - v, \rho, \rho_c$ (246, 247)
573. $\rho_a + \rho_b$ (252, 290)
574. $\rho_a - \rho_b$ (255, 293)
575. $h_c - \rho$ (256)
576. $h_c + \rho_c$ (257).

u) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{p - q}$ und $\mathbf{r}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\sin \delta = \frac{p - q}{2r}$; außerdem ist gegeben:

577. ρ (26, 233)
578. ρ_c (27, 234)
579. ρ_a (28, 235)
580. $\rho_c + \rho$ (11, 226)
581. $\rho_c - \rho$ (13, 228)
582. $\rho_a + \rho_b$ (15, 230)
583. $\rho_a - \rho_b$ (18, 232)
584. $h_c - \rho$ (20, 243)
585. $h_c + \rho_c$ (21, 245).

v) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h_c}$ und $\mathbf{w_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{h_c}{w_c}$; außerdem ist gegeben:

586. ρ (147, 206)
587. ρ_c (149, 208)
588. ρ_a (153, 235)
589. $\rho_c + \rho$ (157, 217)
590. $\rho_c - \rho$ (163, 211)
591. $\rho_a + \rho_b$ (165, 212)
592. $\rho_a - \rho_b$ (159, 220).

D) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel, auch läßt sich nicht durch einfache Division zweier gegebenen Elemente ein Winkel berechnen. Die Aufgaben können alle dadurch gelöst werden, daß aus den für die drei gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln zwei der drei unbekannten Größen, welche in der Regel r, γ und δ sind, eliminiert werden; ist r eins der gegebenen Elemente, so sind nur zwei Formeln notwendig. Viele Aufgaben, namentlich solche, in denen Höhen oder zwei Radien der Berührungskreise gegeben, lassen sich durch Benutzung der Formeln 12 bis 29 auf solche von C) zurückführen; die Nummer der früheren Aufgabe ist dann in Klammern unmittelbar hinter die Aufgabe gesetzt.

a) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{r}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist noch gegeben:

593. h_c, ρ (383). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho^2}{2r(h_c - 2r)}$.

594. h_c, ρ_c (383). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c^2}{2r(h_c + 2\rho_c)}$.

Hosted by Google

595. h_c, $\rho + \rho_c$ (383). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{h_c}{2r}$; $\cos \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho_c + \rho}{4r}$.

596. h_c, $\rho_a - \rho_b$ (421). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \sin \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{h_c}{2r}$; $\cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{\rho_a - \rho_b}{4r}$.

597. h_c, ρ_a (421). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_a{}^2}{2r(2\rho_a - h_c)}$.

598. $h_c - \rho$, $h_c + \rho_c$ (390). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}{4r}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{h_c + \rho_c - (h_c - \rho)}{4r \cos \frac{1}{2}\delta}$.

599. ρ, $h_c + \rho_c$ (383, 390). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{(h_c + \rho_c) - 3\rho}{4r} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{\rho^2}{8r^2} = 0$.

600. ρ_c, $h_c - \rho$ (382, 390.) 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{(h_c - \rho) + 3\rho_c}{4r} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{\rho_c{}^2}{8r^2} = 0$.

601. $\rho_c + \rho$, $\rho_a - \rho_b$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{(\rho_c + \rho) - (\rho_a - \rho_b)}{4r}$; $\cos \beta = \frac{(\rho_c + \rho) + (\rho_a - \rho_b)}{4r}$.

602. s, $h_c + \rho_c$. Aufl. $rs \sin \gamma + r(h_c + \rho_c) \cos \gamma = s^2 - r(h_c + \rho_c)$ (§ 3, 1).

603. $s - c$, $h_c - \rho$. Aufl. $(s - c)^2 = r(h_c - \rho) + r(h_c - \rho) \cos \gamma - r(s - c) \sin \gamma$; vergl. 625.

b) In den folgenden Aufgaben ist **s** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

604. h_c, ρ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho h_c}{s(h_c - 2\rho)}$.

605. h_c, $\rho_a + \rho_b$ (321). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2s^2 - h_c(\rho_a + \rho_b)}{2s(\rho_a + \rho_b)}$.

606. h_c, $\rho_a - \rho_b$ (321.)

607. $h_c + \rho_c$, $h_c - \rho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{(h_c + \rho_c)\left[(h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)\right]}{s\left[(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)\right]}$.

Hosted by Google

608. h_c, $\rho_c - \rho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\rho_c - \rho}{s}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{h_c(\rho_c - \rho)}{2s^2} = 0$.

609. h_c, $\rho_c + \rho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_c + \rho) - h_c}{s}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{h_c(\rho_c + \rho)}{2s^2} = 0$.

610. ρ, $h_c + \rho_c$ (315). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_c + \rho_c) - \rho}{s}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{\rho(h_c + \rho_c)}{s^2} = 0$.

611. $\triangle$, $h_c + \rho_c$ wie 610.

612. $\triangle$, ρ, $h_c + \rho_c$ wie 610.

613. w_c, ρ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{\rho}{s}\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\rho}{w_c}$ (§ 3, 1).

614. $\rho_a + \rho_b$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $2s\sin\gamma + \{(\rho_a + \rho_b) - (\rho_c + \rho)\}\cos\gamma = (\rho_a + \rho_b) + (\rho_c + \rho)$ (§ 3, 1) oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2s}{\rho_a + \rho_b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{\rho_c + \rho}{\rho_a + \rho_b} = 0$.

c) In den folgenden Aufgaben ist **s — c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

615. h_c, ρ_c (325, 330). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{h_c\rho_c}{(s - c)(h_c + 2\rho_c)}$.

616. h_c, $\rho_c + \rho$ (325, 330).

617. h_c, $\rho_c - \rho$ (325, 330).

618. ρ_c, $h_c - \rho$ (325, 330).

619. $\triangle$, $h_c - \rho$ (325, 330).

620. $\triangle$, ρ_c, $h_c - \rho$ (618, 619).

621. $h_c - \rho$, $h_c + \rho_c$ (325, 330).

622. h_c, $\rho_a + \rho_b$ (338, 346).

623. h_c, $\rho_a - \rho_b$ (338, 346).

624. ρ_c, h_b (343).

625. w_c, ρ_c. Aufl. $w_c(s - c)\sin\frac{1}{2}\gamma + w_c\rho_c\cos\frac{1}{2}\gamma = 2\rho_c(s - c)$ (§ 3, 1).

626. $\rho_a + \rho_b$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $2(s - c)\sin\gamma - (\rho_c + \rho + \rho_a + \rho_b)\cos\gamma = \rho_c + \rho - (\rho_a + \rho_b)$ (§ 3, 1).

d) In den folgenden Aufgaben ist **c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

627. ρ, h_c (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\rho^2}{c(h_c - 2\rho)}$.

628. $\triangle$, ρ (627).

629. ρ_c, h_c (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\rho_c^2}{c(h_c + 2\rho_c)}$.

Hosted by Google

630. $\triangle$, ϱ_c (629).

631. ϱ_a, h_c (399, 410). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c\,(2\,\varrho_a - h_c)}{2\,\varrho_a{}^2}$.

632. $\triangle$, ϱ_a (631).

633. h_c, $\varrho_c + \varrho$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{2\,h_c}{c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2}{c^2} = 0$.

634. $\triangle$, $\varrho_c + \varrho$ (633).

635. h_c, $\varrho_a - \varrho_b$ (399, 410). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{2\,c\,h_c}{\varrho_a - \varrho_b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{c^2}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} = 0$.

636. $\triangle$, $\varrho_a - \varrho_b$ (635).

637. ϱ_c, $h_c - \varrho$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{3\,\varrho_c + h_c - \varrho}{c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{2\,\varrho_c{}^2}{c^2} = 0$.

638. ϱ, $h_c + \varrho_c$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{h_c + \varrho_c - 3\,\varrho}{c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{2\,\varrho^2}{c^2} = 0$.

639. $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\left[(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)\right]^2}{c\left[(h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)\right]}$.

640. ϱ, ϱ_a (83, 90). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{c\,(\varrho_a - \varrho)}{\varrho_a{}^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{\varrho^2}{\varrho_a{}^2} = 0$.

641. ϱ_a, ϱ_c (86, 89). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{c\,(\varrho_a + \varrho_c)}{\varrho_a{}^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{\varrho_c{}^2}{\varrho_a{}^2} = 0$.

642. ϱ, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{4\,c\,\varrho}{(\varrho_a - \varrho_b)^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{c^2 - 4\,\varrho^2}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} = 0$.

643. ϱ_c, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4\,c\,\varrho_c}{(\varrho_a - \varrho_b)^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{4\,\varrho_c{}^2 - c^2}{(\varrho_a - \rho_b)^2} = 0$.

Hosted by Google

644. ϱ_a, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4\,c\,\varrho_a}{(\varrho_c+\varrho)^2} \cot \frac{1}{2}\gamma + \frac{4\,\varrho_a{}^2 - c^2}{(\varrho_c+\varrho)^2} = 0$.

645. $\varrho_c + \varrho$, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\frac{\varrho_a - \varrho_b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$; $\frac{\varrho_c + \varrho}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§ 9, 3).

646. p, q, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\frac{\varrho_c + \varrho}{p - q} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$; $\frac{\varrho_c + \varrho}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§ 9, 3).

647. p, q, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\frac{\varrho_a - \varrho_b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$; $\frac{p - q}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§ 9, 3).

648. u, v, $\varrho_c + \varrho$. 1. Aufl. $4\,uv\,(\varrho_c + \varrho)^2 \cos \frac{1}{2}\gamma^4 - c^2 \left\{c^2 + (\varrho_c + \rho)^2\right\} \cos \frac{1}{2}\gamma^2 + c^4 = 0$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{(\varrho_c + \rho)^2 - c^2}{c^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(u - v)^2\,(\varrho_c + \rho)^2}{c^4} = 0$.

649. u, v, $\rho_a - \rho_b$. 1. Aufl. $4\,uv\,(\rho_a - \rho_b)^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^4 + (u - v)^2 \left\{c^2 + (\rho_a - \rho_b)^2\right\} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - c^2\,(u - v)^2 = 0$. 2. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{c^2 - (\rho_a - \rho_b)^2}{c^2} \cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_a - \rho_b)^2}{(u - v)^2} = 0$.

e) In den folgenden Aufgaben ist **a + b** eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 660 bis 662 ist die Formel $a + b \pm (p - q) = 4\,r \cos \frac{1}{2}\delta\,(\cos \frac{1}{2}\gamma \pm \sin \frac{1}{2}\delta)$ zu benutzen. Außer **a + b** ist noch gegeben:

650. h_c, ρ (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,\rho\,(h_c - \rho)}{(a + b)\,(h_c - 2\,\rho)}$.

651. h_c, ρ_c (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,\rho_c\,(h_c + \rho_c)}{(a + b)\,(h_c + 2\,\rho_c)}$.

652. $h_c, \rho_c - \rho$ (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(\rho_c - \rho)\,(2\,h_c + \rho_c - \rho)}{(a + b)^2}$.

653. $h_c, \rho_a + \rho_b$ (487, 494). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(\rho_a + \rho_b)\,(\rho_a + \rho_b - 2\,h_c)}{(a + b)^2}$.

654. h_c, ρ_a (487, 494). 2. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta = \frac{(a + b)\,(2\,\rho_a - h_c)}{2\,\rho_a\,(\rho_a - h_c)}$.

655. ρ_c, $h_c - \rho$ (461, 466).

656. ρ, $h_c + \rho_c$ (461, 466).

Hosted by Google

657. c, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2c(h_c - \rho)}{(a+b)(a+b-c)}$.

658. c, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2c(h_c + \rho_c)}{(a+b)(a+b+c)}$.

659. $p - q$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\rho_a + \rho_b)(p-q)}{(a+b)^2}$.

660. $p - q$, ρ_a. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2\rho_a(p-q)}{(a+b)(a+b+p-q)}$.

661. $p - q$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{2(h_c - \rho)}{a+b-(p-q)}$;
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{2(h_c - \rho)}{a+b+p-q}$.

662. $p - q$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{a+b+p-q}{2(h_c + \rho_c)}$;
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{a+b-(p-q)}{2(h_c + \rho_c)}$.

663. $p - q$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\rho_c - \rho}{p-q} \cot \frac{1}{2}\delta + \frac{(p-q)^2 - (a-b)^2}{(p-q)^2} = 0$.

664. a, b, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma^4 (\rho_c - \rho)^2 + \left[(\rho_c - \rho)^2 - (a-b)^2\right] \cot \frac{1}{2}\gamma^2 - (a+b)^2 = 0$.

665. a, b, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^4 (\rho_a + \rho_b)^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 \left[(\rho_a + \rho_b)^2 - (a+b)^2\right] - (a-b)^2 = 0$.

666. ρ_a, h_a. Aufl. Aus $\frac{a+b}{\rho_a} = \cot \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ und $\frac{h_a}{2\rho_a} = \sin \frac{1}{2}\beta (\cot \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\beta)$ folgt $\frac{h_a}{2\rho_a} = \frac{a+b}{2\rho_a} \sin \beta - (1 - \cos \beta)$ oder $\frac{a+b}{2\rho_a} \sin \beta + \cos \beta = \frac{2\rho_a + h_a}{2\rho_a}$ (§ 3, 1).

667. ρ_a, h_b. Aufl. $\frac{a+b}{2\rho_a} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2\rho_a - h_b}{2\rho_a}$ (§ 3, 1).

668. ρ, ρ_s (666). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_a - \rho)(a+b)}{\rho_a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma + \frac{\rho(2\rho_a - \rho)}{\rho_a^2} = 0$.

669. ρ, h_a (666). 2. Aufl. $(a+b)(h_a - 2\rho) \sin \gamma + 2\rho^2 \cos \gamma =$

Hosted by Google

$h_a^2 - 2\rho^2$ (§ 3, 1) oder $h_a^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - 2s(h_a - 2\rho)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + h_a^2 - 4\rho^2 = 0$.

670. ρ_a, ρ_c (667). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{(\rho_c + \rho_a)(a+b)}{\rho_a^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{\rho_c(2\rho_a + \rho_c)}{\rho_a^2} = 0$.

671. ρ_c, h_a (667, 670)

f) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a-b}$ eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 681 bis 684 ist die Formel $(p-q) \pm (a-b) = 4r \sin\frac{1}{2}\delta (\cos\frac{1}{2}\delta \pm \sin\frac{1}{2}\gamma)$ zu benutzen. Außer $\mathbf{a-b}$ ist noch gegeben:

672. h_c, ρ (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)(h_c - 2\rho)}{2\rho(h_c - \rho)}$.

673. h_c, ρ_c (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)(h_c + 2\rho_c)}{2\rho_c(h_c + \rho_c)}$.

674. ρ_c, $h_c - \rho$ (501, 508).

675. ρ, $h_c + \rho_c$ (501, 508).

676. h_c, $\rho_c - \rho$ (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(a-b)^2}{(2h_c + \rho_c - \rho)(\rho_c - \rho)}$.

677. h_c, $\rho_a + \rho_b$ (475, 482). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(a-b)^2}{(\rho_a+\rho_b)(\rho_a+\rho_b-2h_c)}$.

678. h_c, ρ_a (498, 505). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{(a-b)(2\rho_a - h_c)}{2\rho_a(\rho_a - h_c)}$.

679. c, ρ_a. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c + (a-b)}{2\rho_a}$.

680. c, ρ_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c - (a-b)}{2\rho_b}$.

681. $p-q$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)\{(p-q) - (a-b)\}}{2\rho(p-q)}$.

682. $p-q$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)\{(p-q) + (a-b)\}}{2\rho_c(p-q)}$.

683. $p-q$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q) - (a-b)}{2(h_c - \rho)}$.

684. $p-q$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q) + (a-b)}{2(h_c + \rho_c)}$.

685. $p-q$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)^2}{(p-q)(\rho_c - \rho)}$.

686. $p-q$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\rho_a + \rho_b}{p-q}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta + \frac{(p-q)^2 - (a-b)^2}{(p-q)^2} = 0$.

Hosted by Google

687. $u - v$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)-(u-v)}{2\rho}$.

688. $u - v$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)+(u-v)}{2\rho_c}$.

689. $u - v$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)\left[(a-b)-(u-v)\right]}{2(u-v)(h_c-\rho)}$.

690. $u - v$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(a-b)\left[(a-b)+(u-v)\right]}{2(u-v)(h_c+\rho_c)}$.

691. $u - v$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\delta - \frac{(u-v)(\rho_a+\rho_b)}{(a-b)^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta + \frac{(a-b)^2-(u-v)^2}{(a-b)^2} = 0$.

692. ρ, h_a. Aufl. Ähnlich wie in 666 findet man: $\cos\beta - \frac{a-b}{2\rho} \sin\beta = \frac{h_a - 2\rho}{2\rho}$ (§ 3, 1).

693. ρ, h_b. Aufl. $\cos\alpha + \frac{a-b}{2\rho} \sin\alpha = \frac{h_b - 2\rho}{2\rho}$ (§ 3, 1).

694. ρ_c, h_a. Aufl. $\cos\beta - \frac{a-b}{2\rho_c} \sin\beta = \frac{2\rho_c - h_a}{2\rho_c}$ (§ 3, 1).

695. ρ_c, h_b. Aufl. $\cos\alpha + \frac{a-b}{2\rho_c} \sin\alpha = \frac{2\rho_c - h_b}{2\rho_c}$ (§ 3, 1).

696. ρ, ρ_a (772). 2. Aufl. $\cot^2 \frac{1}{2}\gamma + \frac{(\rho_a - \rho)(a-b)}{\rho^2} \cot \frac{1}{2}\gamma - \frac{\rho_a(\rho_a - 2\rho)}{\rho^2} = 0$.

697. ρ_a, h_a (692, 695).

698. ρ, ρ_b (693).

699. ρ_b, h_a (694).

700. ρ_a, h_b (695).

701. ρ_a, ρ_c (695). 2. Aufl. $\rho_c^2 \cot^2 \frac{1}{2}\gamma + (\rho_c + \rho_a)(a-b) \cot \frac{1}{2}\gamma - \rho_a(2\rho_c + \rho_a) = 0$.

702. ρ_b, ρ_c (694).

g) In den folgenden Aufgaben sind Radien der Berührungskreise oder ihre Summen und Differenzen die gegebenen Stücke. Eine zweite Auflösung dieser Aufgaben erhält man, wenn man mittelst der Formeln 12 bis 29 die drei Höhen berechnet und sie so auf § 14, 559 zurückführt.

703. ρ, ρ_a, ρ_b. Aufl. Aus $\rho_a - \rho = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha^2$ und $\rho_b - \rho = 4r \sin \frac{1}{2}\beta^2$ folgt $\sqrt{(\rho_a - \rho)(\rho_b - \rho)} = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$; mithin $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho}{\sqrt{(\rho_a - \rho)(\rho_b - \rho)}}$; ebenso

Hosted by Google

erhält man $\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{\rho_a}{\sqrt{(\rho_a+\rho_b)(\rho_a-\rho)}}$, wodurch die Aufgabe auf 1 zurückgeführt ist.

704. ρ_a, ρ_b, ρ_c. Aufl. $\sqrt{(\rho_a+\rho_b)(\rho_a+\rho_c)} = 4\,r\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho_a}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$; mithin $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\rho_a}{\sqrt{(\rho_a+\rho_b)(\rho_a+\rho_c)}}$; ebenso $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\rho_b}{\sqrt{(\rho_a+\rho_b)(\rho_b+\rho_c)}}$, wodurch die Aufgabe auf 2 zurückgeführt ist.

705. ρ, ρ_c, $\rho_a-\rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{4\rho_c\rho}{(\rho_a-\rho_b)^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_c-\rho)^2}{(\rho_a-\rho_b)^2} = 0$.

706. ρ_a, ρ_b, $\rho_c+\rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{4\rho_a\rho_b}{(\rho_a+\rho_b)^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_c+\rho)^2}{(\rho_a+\rho_b)^2} = 0$.

h) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{h}_c$ eins der gegebenen Stücke. Eine Auflösung der Aufgaben 712 bis 725 erhält man dadurch, daß man sie durch Anwendung der Formeln 12 bis 29 auf eine der unter g) angeführten Aufgaben zurückführt. Bei den Aufgaben 726 bis 746 ist zu beachten, daß h_c, $\frac{1}{2}(p-q)$ und t_c Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, mithin voneinander abhängige Stücke sind (vergl. § 14, Anm.). Außer $\mathbf{h}_c$ ist noch gegeben:

707. $\triangle$, ρ (359).
708. $\triangle$, ρ_c (359).
709. $\triangle$, $\rho_c+\rho$ (359).
710. $\triangle$, ρ_a (401).
711. $\triangle$, $\rho_a-\rho_b$ (401).

712. ρ, ρ_a (703). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho^2(2\rho_a-h_c)}{\rho_a^2(h_c-2\rho)}$ (146, 152).
3. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\rho_a-h_c}{\rho_a}$, $\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{h_c-\rho}{\rho}$ (§ 9, 4).

713. ρ_a, ρ_c. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c^2(2\rho_a-h_c)}{\rho_a^2(2\rho_c+h_c)}$ (148, 152). 3. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\rho_a-h_c}{\rho_a}$, $\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{h_c+\rho_c}{\rho_c}$ (§ 9, 4).

714. ρ, $\rho_a+\rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2\rho^2}{(\rho_a+\rho_b)(h_c-2\rho)}$ (146, 164).
3. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \sqrt{\frac{\rho_a+\rho_b-2h_c}{\rho_a+\rho_b}}$, $\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{h_c-\rho}{\rho}$ (§ 9, 4).

Hosted by Google

715. ρ, $\rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (146, 158). 3. Aufl. 705.

716. ρ_c, $\rho_a + \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2\,\rho_c^2}{(\rho_a + \rho_b)\,(h_c + 2\,\rho_c)}$ (148, 164). 3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma} = \sqrt{\frac{\rho_a + \rho_b - 2\,h_c}{\rho_a + \rho_b}}$, $\frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{h_c + \rho_c}{\rho_c}$ (§ 9, 4).

717. ρ_c, $\rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (148, 158). 3. Aufl. 705.

718. ρ_a, $\rho_c - \rho$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(\rho_c - \rho)\,(2\,\rho_a - h_c)}{2\,\rho_a^2}$ (152, 162). 3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\rho_a - h_c}{\rho_a}$, $\frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \sqrt{\frac{2\,h_c + \rho_c - \rho}{\rho_c - \rho}}$ (§ 9, 4).

719. ρ_a, $\rho_c + \rho$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (152, 156). 3. Aufl. 706.

720. $\rho_c - \rho$, $\rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (158, 162). 3. Aufl. 705.

721. $\rho_c + \rho$, $\rho_a + \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (156, 164). 3. Aufl. 706.

722. $\rho_c + \rho$, $\rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (162, 164). 3. Aufl. 705. 706.

723. h_a, ρ (703, 712).

724. h_b, ρ_a (703, 713).

725. h_a, ρ_a (703, 712).

726. $p - q$, ρ. Aufl. Aus $\frac{h_c - \rho}{\rho} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{p - q}{h_c - \rho} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\delta - \sin \frac{1}{2}\gamma}$ oder $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{2\,\rho\,(h_c - \rho)}{(h_c - 2\,\rho)\,(p - q)}$ folgt $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(p - q)\,(h_c - 2\,\rho)}{2\,(h_c - \rho)^2}$.

727. t_c, ρ.

728. t_c, $p - q$, ρ.

Hosted by Google

729. $p - q$, ρ_c. Aufl. Ähnlich wie in 756 ergiebt sich $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q)(h_c + 2\rho_c)}{2(h_c + \rho_c)^2}$.

730. t_c, ρ_c.

731. t_c, $p - q$, ρ_c.

732. $p - q$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta = \frac{2h_c + \rho_c - \rho}{p - q}$.

733. t_c, $\rho_c - \rho$.

734. t_c, $p - q$, $\rho_c - \rho$.

735. $p - q$, $\rho_c + \rho$ (762). 2. Aufl. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\delta + \frac{2h_c(p-q)}{(\rho_c + \rho)^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta - \frac{(p-q)^2}{(\rho_c + \rho)^2} = 0$.

736. t_c, $\rho_c + \rho$.

737. t_c, $p - q$, $\rho_c + \rho$.

738. $p - q$, ρ_a. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2(\rho_a - h_c)^2}{(p-q)(2\rho_a - h_c)}$.

739. t_c, ρ_a.

740. t_c, $p - q$, ρ_a.

741. $p - q$, $\rho_a + \rho_b$ (768). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{\rho_a + \rho_b - 2h_c}{p - q}$.

742. t_c, $\rho_a + \rho_b$.

743. t_c, $p - q$, $\rho_a + \rho_b$.

744. $p - q$, $\rho_a - \rho_b$ (768). 2. Aufl. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\delta + \frac{2h_c}{p-q} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta - \frac{(\rho_a - \rho_b)^2}{(p-q)^2} = 0$.

745. t_c, $\rho_a - \rho_b$.

746. t_c, $p - q$, $\rho_a - \rho_b$.

i) In den folgenden Aufgaben befinden sich $\mathbf{h}_c + \varrho_c$ oder $\mathbf{h}_c - \varrho$ unter den gegebenen Stücken; außerdem sind Radien der Berührungskreise oder ihre Summen, resp. Differenzen gegeben; dieselben sind durch die Formeln 27, 28, 29 auf die Aufgaben 703 und 704 zurückzuführen.

747. ϱ, ϱ_a, $h_c + \varrho_c$.

748. ϱ_a, ϱ_c, $h_c - \varrho$.

749. ϱ_a, $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$.

750. ϱ, $\varrho_a - \varrho_b$, $h_c + \varrho_c$.

751. ϱ_c, $\varrho_a - \varrho_b$, $h_c - \varrho$.

752. $\varrho_a - \varrho_b$, $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$.

753. ϱ, $\varrho_a + \varrho_b$, $h_c + \varrho_c$.

754. ϱ_c, $\varrho_a + \varrho_b$, $h_c - \varrho$.

755. $\varrho_a + \varrho_b$, $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma = \frac{\{(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)\}^2}{(\rho_a + \varrho_b)(h_c + \varrho_c + h_c - \varrho)}$.

k) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h}_a$ und $\mathbf{h}_b$ die gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

756. $\varrho_c - \varrho$. Aufl. Aus $\frac{h_b - h_a}{2(\varrho_c - \varrho)} = \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta$ und

Hosted by Google

$\frac{h_b - h_a}{h_b + h_a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta$ folgt $\cos \frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{h_a h_b}{(\rho_c - \rho)^2} \cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_b + h_a)^2}{4(\rho_c - \rho)^2} = 0$.

757. $\rho_a + \rho_b$. Aufl. Ähnlich wie in 756 ergiebt sich $\sin \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{h_a h_b}{(\rho_a + \rho_b)^2} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_b - h_a)^2}{4(\rho_a + \rho_b)^2} = 0$.

l) In den folgenden Aufgaben ist w_c eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

758. ρ, ρ_c (609, 610). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\rho\rho_c}{w_c(\rho_c + \rho)}$, $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2\rho\rho_c}{w_c(\rho - \rho_c)}$.

759. ρ_a, ρ_b (588). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2\rho_a\rho_b}{w_c(\rho_a + \rho_b)}$; $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\rho_a\rho_b \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta}{\rho_a + \rho_b}$.

760. $h_c - \rho$, $h_c + \rho_c$ (586, 587.) 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2(h_c - \rho)(h_c + \rho_c)}{w_c(h_c - \rho + h_c + \rho_c)}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{2(h_c - \rho)(h_c + \rho_c)\{(h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)\}}{w_c(h_c - \rho + h_c + \rho_c)^2}$.

761. ρ_c, $h_c - \rho$ (586, 587). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{\rho_c - (h_c - \rho)}{w_c} \cos \frac{1}{2}\delta - \frac{2\rho_c(h_c - \rho)}{w_c^2} = 0$ und dadurch γ aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\delta \left(\frac{w_c \cos \frac{1}{2}\delta}{h_c - \rho} - 1\right)$.

762. ρ, $h_c + \rho_c$ (586, 587). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{h_c + \rho_c + \rho}{w_c} \cos \frac{1}{2}\delta + \frac{2\rho(h_c + \rho_c)}{w_c^2} = 0$ und dadurch γ aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\delta \left(1 - \frac{w_c}{h_c + \rho_c} \cos \frac{1}{2}\delta\right)$.

763. $u - v$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $(\rho_a + \rho_b) \cos \frac{1}{2}\delta - (u - v) \sin \frac{1}{2}\delta = 2 w_c$ (§ 3, 1), und dann $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(u - v) \cot \frac{1}{2}\delta}{\rho_a + \rho_b}$.

m) In den folgenden Aufgaben ist $p - q$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

764. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(p - q)(\varrho_c - \varrho)}{(\varrho_c + \varrho)^2}$ (233, 234, 272).

Hosted by Google

765. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\varrho_a - \varrho_b)^2}{(p-q)(\varrho_a + \varrho_b)}$; $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{(\varrho_a + \varrho_b) \sin \frac{1}{2}\delta}{\varrho_a - \varrho_b}$.

766. $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta = \frac{h_c - \varrho + h_c + \varrho_c}{p-q}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{h_c + \varrho_c - (h_c - \varrho)}{p-q} \sin \frac{1}{2}\delta$.

767. ϱ_c, $h_c - \varrho$ (764).

768. ϱ, $h_c + \varrho_c$ (764).

769. $\varrho_a - \varrho_b$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{p-q}$; $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_c + \varrho}{p-q}$ (§ 9, 3).

770. $\varrho_a + \varrho_b$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\varrho_a + \varrho_b}{p-q} \cot \frac{1}{2}\delta - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2 - (p-q^2)}{(p-q)^2} = 0$ (226, 230, 288).

771. $\varrho_a - \varrho_b$, $\varrho_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\varrho_c + \varrho}{p-q} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta - \frac{(\varrho_a - \varrho_b)^2 - (p-q)^2}{(p-q)^2} = 0$ (228, 232, 293).

772. $u - v$, $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $(u-v)\cos\delta + (\varrho_a + \varrho_b)\sin\delta = 2(p-q) - (u-v)$ (§ 3, 1) (230, 252).

773. $u - v$, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} - \sqrt{u-v})\sqrt{u-v}}{2\varrho}$ (233, 246).

774. $u - v$, ϱ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} + \sqrt{u-v})\sqrt{u-v}}{2\varrho_c}$ (234, 247).

775. $u - v$, $h_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} - \sqrt{u-v})\sqrt{p-q}}{2(h_c - \varrho)}$ (243, 256).

776. $u - v$, $h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} + \sqrt{u-v})\sqrt{p-q}}{2(h_c + \varrho_c)}$ (245, 257).

n) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{u - v}$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

777. ϱ, $h_c + \varrho_c$ (566, 572, 576).

778. ϱ_c, $h_c - \varrho$ (566, 572, 576).

Hosted by Google

779. $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(u-v)(h_c+\varrho_c+h_c-\varrho)}{\left[(h_c+\varrho_c)-(h_c-\varrho)\right]^2}$ (299).

780. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{(u-v)(\varrho_a+\varrho_b)}{(\varrho_a-\varrho_b)^2} \cot \frac{1}{2}\delta - \frac{4\varrho_a\varrho_b}{(\varrho_a-\varrho_b)^2} = 0$ (252, 255).

781. h_c, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2h_c}{u-v} \cot \frac{1}{2}\delta - \frac{(\varrho_c+\varrho)^2}{(u-v)^2} = 0$.

782. h_c, $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $(\varrho_a+\varrho_b)\cos\delta - (u-v)\sin\delta = 4h_c - (\varrho_a+\varrho_b)$.

783. h_c, ϱ_a (780, 782). 784. h_c, $\varrho_a - \varrho_b$ (780).

§ 16.

Aufgaben, in denen Mittellinien oder durch diese bedingte Winkel gegeben sind.

A. Aufgaben, in denen die Beziehungen zwischen den Winkeln α, β, γ_1 und γ_2 zu beachten sind.

Durch Berechnung der Dreieckswinkel sind die Aufgaben auf die von § 14, A und die von § 15, A zurückgeführt.

a) Aus α und β sind γ_1 und γ_2 zu berechnen. Es ist $\frac{t_c}{\sin\alpha} = \frac{c}{2\sin\gamma_1}$ und $\frac{t_c}{\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma_2}$; mithin $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ (1); hieraus folgt $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1-\sin\gamma_2}$ oder $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$ (2). Aus (1) sind γ_1 und γ_2 zu berechnen nach § 7, 1, da $\gamma_1+\gamma_2 = \pi - (\alpha+\beta)$; oder man kann γ_1 und γ_2 nach (2) berechnen.

1. t_c, α, β.

b) Aus γ_1 und γ_2 sind α und β zu berechnen. Nach a) Formel (1) ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, also α und β nach § 7, 1 zu berechnen, da $\alpha+\beta = \pi - (\gamma_1+\gamma_2)$ ist. Oder α und β sind nach a) Formel (2) zu berechnen, da $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \cot\frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)$.

In den folgenden Aufgaben ist außer γ_1 und γ_2 noch gegeben:

2. r
3. c
4. a + b
5. a − b
6. s
7. s − c
8. h_c
9. h_a

Hosted by Google

10. $h_b + h_a$	14. w_c	18. ϱ_c	21. $a^2 - b^2$
11. $h_b - h_a$	15. u	19. $\triangle$	22. $a^2 + b^2 - c^2$
12. p	16. u — v	20. $a^2 + b^2$	23. ab.
13. p — q	17. ϱ		

c) Aus α und γ_1 ist β und γ_2 zu berechnen nach § 7, 1, da $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}$ und $\beta + \gamma_2 = \pi - (\alpha + \gamma_1)$ ist; mithin ähnlich wie a), Formel (2): $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma_2) = \cot\frac{1}{2}(\alpha + \gamma_1)^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1)$. In den folgenden Aufgaben ist außer α und γ_1 noch gegeben:

24. r	30. h_a	35. w_c	40. $\triangle$
25. a	31. $h_b + h_a$	36. u	41. $a^2 + b^2$
26. a + b	32. $h_b - h_a$	37. u — v	42. $a^2 - b^2$
27. a — b	33. p	38. ϱ	43. $a^2 + b^2 - c^2$
28. s	34. p — q	39. ϱ_c	44. ab
29. s — c			

d) Aus α und γ_2 ist β und γ_1 zu berechnen nach § 6, 1, da $\sin\beta \sin\gamma_1 = \sin\alpha \sin\gamma_2$ und $\beta + \gamma_1 = \pi - (\alpha + \gamma_2)$ ist. In den folgenden Aufgaben ist außer α und γ_2 noch gegeben:

45. r	52. s — c	59. t_c	65. $\triangle$
46. c	53. h_c	60. w_c	66. $a^2 + b^2$
47. a	54. h_a	61. u	67. $a^2 - b^2$
48. b	55. $h_b + h_a$	62. u — v	68. $a^2 + b^2 - c^2$
49. a + b	56. $h_b - h_a$	63. ϱ	69. ab
50. a — b	57. p	64. ϱ_c	70. t_c, h_a, α.
51. s	58. p — q		

e) Aus δ und $\gamma_1 - \gamma_2$ ist α und β zu berechnen nach a) Formel (2), es ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \cot\frac{1}{2}\delta \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$. In den folgenden Aufgaben ist außer δ und $\gamma_1 - \gamma_2$ noch gegeben:

71. r	77. s — c	83. p — q	89. ϱ_c
72. c	78. h_c	84. t_c	90. $\triangle$
73. a	79. h_a	85. w_c	91. $a^2 + b^2$
74. a + b	80. $h_b + h_a$	86. u	92. $a^2 - b^2$
75. a — b	81. $h_b - h_a$	87. u — v	93. $a^2 + b^2 - c^2$
76. s	82. p	88. ϱ	94. ab.

B. Aufgaben, welche mit den drei Aufgaben c, t_c, γ oder c, t_c, δ oder a, t_c, α in Zusammenhang stehen.

Bei den Aufgaben, in welchen $a^2 + b^2$ oder $a^2 + b^2 - c^2$ gegeben, sind die Formeln § 14, 25 und 27 zu beachten, nämlich $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2$ und $a^2 + b^2 - c^2 = 2t_c^2 - \frac{1}{2}c^2$.

Hosted by Google

a) Aufgaben, welche auf die Aufgabe c, t_c, γ zurückzuführen sind. In allen Aufgaben ergiebt sich eine gute Formel für den Inhalt. Der Mittelpunkt des Umkreises ist M.

95. c, t_c, γ. 1. Aufl. $\frac{t_c^2}{c^2} = \frac{1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2}{4\sin\gamma^2}$; oder $\cos\delta = \frac{4\,t_c^2\sin\gamma^2 - c^2 - c^2\cos\gamma^2}{2\,c^2\cos\gamma} = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{2\,c^2\cot\gamma}\sin\gamma - \cos\gamma$ (§ 3, 2). 2. Aufl. Im $\triangle$ CMF ist $CM^2 = t_c^2 + MF^2 - 2\,t_c\,MF\sin\varepsilon$ oder $\frac{c^2}{4\sin\gamma^2} = t_c^2 + \frac{c^2}{4\sin\gamma^2} - \frac{c^2}{4} - c\,t_c\cot\gamma\sin\varepsilon$ oder $\sin\varepsilon = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{4\,c\,t_c\cot\gamma}$. Ferner ist $\sin\varepsilon = \frac{b\sin\alpha}{t_c} = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{t_c\sin\gamma}$; mithin $\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{4\,c\cot\gamma}$ oder $\cos\delta = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{2\,c^2\cot\gamma}\sin\gamma - \cos\gamma$ (§ 3, 2). 3. Aufl. Aus $c\sin\alpha = 2\,t_c\sin\gamma_1$ und $c\sin\beta = 2\,t_c\sin\gamma_2$ folgt durch Addition und Subtraktion $c\cot\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta = 2\,t_c\cos\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ und $c\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta = 2\,t_c\sin\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$. Durch Quadrierung und Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man: $c^2(\cot\frac{1}{2}\gamma^2\cos\frac{1}{2}\delta^2 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma^2\sin\frac{1}{2}\delta^2) = 4\,t_c^2$ oder $\sin\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{c^2\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - 4\,t_c^2}{c^2(\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma^2)}$; und wenn $\cos\varphi = \frac{2\,t_c}{c\cot\frac{1}{2}\gamma}$ gesetzt wird, so ist $\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma^2\sin\varphi}{\sqrt{\cos\gamma}}$. 4. Aufl. Ähnlich wie in Aufl. 3 findet man $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{c^2\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - 4\,t_c^2}{4\,t_c^2 - c^2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma^2}$, und wenn $\frac{2\,t_c}{c} = \mathrm{tg}\,\varphi$ gesetzt wird, so ist $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\delta = \cot\frac{1}{2}\gamma\sqrt{\cot(\varphi + \frac{1}{2}\gamma)\cot(\varphi - \frac{1}{2}\gamma)}$. 5. Aufl. Nach Aufl. 3 ist $\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)} = \frac{2\,t_c}{c}\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma$ und $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)} = \frac{2\,t_c}{c}\cot\frac{1}{2}\gamma$; mithin $\frac{1}{2}\delta$ und $\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ nach § 9, 3 zu berechnen. 6. Aufl. Es ist $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\,t_c^2$ und $ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cos\gamma} = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{4\cos\gamma}$, also a und b zu berechnen. Inhaltsberechnung. 1. Aufl. $\triangle = 2\,ACF = \frac{1}{2}c\,t_c\sin\varepsilon$. In der 2. Aufl. war $\sin\varepsilon = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{4\,c\,t_c\cot\gamma'}$ mithin $\triangle = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{8\cot\gamma}$. 2. Aufl. $\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Nun ist $ab = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{4\cos\gamma}$, also $\triangle = \frac{4\,t_c^2 - c^2}{8\cot\gamma}$.

Hosted by Google

95a. Von △ ABC kennt man γ, die beliebige Transversale CD = t, welche von C nach AB gezogen, und die beiden Abschnitte BD = m und AD = n. Aufl. Wenn $\angle$ ACD = ζ und BCD = η, so ist $\frac{\sin\beta}{\sin\eta} = \frac{t}{m}$ und $\frac{\sin\alpha}{\sin\zeta} = \frac{t}{n}$; daher § 9, 7.

95b. t_a, t_c, γ (95a) 97. t_c, r, γ 99. t_c, $a^2+b^2-c^2$, r

96. c, t_c, r 98. t_c, $a^2+b^2-c^2$, γ 100. t_c, a^2+b^2, γ.

101. r, a^2+b^2, γ. Eine Auflösung dieser Aufgabe ist auch die folgende: $\cos\delta = \frac{a^2+b^2-4r^2}{4r^2\cos\gamma}$.

102. t_c, △, γ. Aufl. Aus 95 folgt $c^2 = 4t_c^2 - 8\triangle\cot\gamma$.

103. $a^2+b^2=s^2$, △, γ. Aufl. $t_c^2 = \triangle\cot\gamma + \frac{1}{4}s^2$; $c^2 = s^2 - 4\triangle\cot\gamma$.

104. a, b, ε. Aufl. Im △ ACF ist AC = b, EF = $\frac{1}{2}$ a und $\angle$ AFC = ε, daher ACF nach 95 aufzulösen.

b) Aufgaben, welche auf die Aufgabe c, t_c, δ zurückzuführen sind.

105. c, t_c, δ. Aufl. $\frac{4t_c^2}{c^2} = \frac{1+2\cos\delta\cos\gamma+\cos\gamma^2}{\sin\gamma^2}$; mithin $\cos\gamma^2 + \frac{2c^2\cos\delta}{4t_c^2+c^2}\cos\gamma - \frac{4t_c^2-c^2}{4t_c^2+c^2} = 0$. Hierin $\frac{c}{2t_c} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, giebt $\cos\gamma^2 + 2\sin\varphi^2\cos\delta\cos\gamma - \cos 2\varphi = 0$.

106. c, a^2+b^2, δ. 107. t_c, a^2+b^2, δ. 108. t_c, $a^2+b^2-c^2$, δ.

c) Aufgaben, welche auf die Aufgabe a, t_c, α zurückzuführen sind.

109. a, t_c, α. Aufl. Aus $\frac{a}{t_c} = \frac{\sin(\alpha+\gamma_1)}{\sin(\alpha+\gamma)}$ und $\frac{a}{2t_c} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma}$ folgt $\frac{a+t_c}{a-t_c} = \operatorname{tg}\{\alpha+\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma)\}\cot\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma)$ und $\frac{a+2t_c}{a-2t_c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma)\cot\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma)$. Mithin ist $\frac{\operatorname{tg}\{\alpha+\frac{1}{2}(\gamma+\gamma_1)\}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma_1)} = \frac{(a+t_c)(a-2t_c)}{(a-t_c)(a+2t_c)}$, woraus $\gamma+\gamma_1$ nach § 6, 10 zu berechnen ist; außer einer der vorhergehenden Formeln findet man auch $\gamma_1-\gamma$, kennt also die Winkel des Dreiecks.

110. r, t_c, α. 111. a, r, t_c.

112. a, c, γ_1. Aufl. Im △ ACF ist AF = $\frac{1}{2}$ c, EF = $\frac{1}{2}$ a und $\angle$ ACF = γ_1, daher △ ACF nach 109 aufzulösen.

Außerdem sei hier noch angeführt:

113. c, h_b, ε. Aufl. △ ACF ist nach § 14, 65 aufzulösen.

C. Aufgaben, welche durch Auflösung des Dreiecks ASB auf frühere zurückzuführen sind.

Hosted by Google

a) Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß die drei Mittellinien durch S im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden, und daß das von S auf AB gefällte Lot $= \frac{1}{2} h_c$ ist. Für die Aufgaben 139 bis 147 ist noch von S auf AB das Lot SG, von C auf AB das Lot CH zu fällen, und AG auf GB von G bis K abzutragen, so ist $AG = \frac{1}{3}(p + 2q)$; $BG = \frac{1}{3}(2p+q)$; $BK = \frac{1}{3}(p - q)$ und $GF = \frac{1}{6}(p - q)$. Nach Berechnung von $\triangle$ ASB sind aus diesem die fehlenden Stücke von $\triangle$ ABC zu berechnen, entweder aus t_a, t_b, t_c, (196) oder durch Auflösung der Dreiecke ASE und BDS, denn man kennt von jedem derselben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; auch könnte man α und β nach b) berechnen.

114. c, α_1, β_2
115. t_a, α_1, β_2
116. t_a, t_b, α_1
117. c, t_a, β_2
118. c, t_a, $\angle (t_a t_b)$
119. t_a, t_b, $\angle (t_a t_b)$
120. c, t_a, t_b
121. c, t_a, t_c
122. h_c, α_1, β_2
123. t_a, t_b, h_c
124. t_a, t_c, h_c
125. $t_a + t_b$, α_1, β_2 (§ 14, 1)
126. $t_a - t_b$, α_1, β_2 (§ 14, 2)
127. c, $t_a + t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 51)
128. c, $t_a - t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 53)
129. c, h_c, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 65)
130. c, $t_a + t_b$, α_1 (§ 14, 70)
131. c, $t_a - t_b$, α_1 (§ 14, 71)
132. t_c, $t_a + t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 96)
133. t_c, $t_a - t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 124)
134. c, h_c, $t_a + t_b$ (§ 14, 453)
135. c, h_c, $t_a - t_b$ (§ 14, 455)
136. t_c, α_1, β_2 (1)
137. c, t_c $\angle (t_a t_b)$ (95)
138. t_a, t_c, β_2 (109)
139. p, q, t_a
140. p, q, α_1
141. p, q, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 233)
142. p, q, $\alpha_1 - \beta_2$ (§ 14, 235)
143. $p - q$, t_a, α_1
144. $p - q$, t_a, t_b
145. $p - q$, t_a, $\alpha_1 - \beta_2$
146. $p - q$, h_c, $\angle (t_a t_b)$ (§ 14, 189)
147. $p - q$, h_c, $\alpha_1 - \beta_2$ (§ 14, 191).

b) In den folgenden Aufgaben sind die Winkel α_1 und β_2 gegeben; aus denselben sind die Winkel α und β zu berechnen. Fällt man von D und E die Lote DG und EH auf AB, so ist $DG = EH = \frac{1}{2} h_c$; und $c = \frac{1}{2} h_c (\cot \alpha + \cot \beta_2) = \frac{1}{2} h_c (\cot \beta + \cot \alpha_1)$; mithin $\cot \beta - \cot \alpha = \cot \beta_2 - \cot \alpha_1$ (1). Ferner $GH = \frac{1}{2} c = AG - AH = \frac{1}{2} h_c (\cot \alpha_1 - \cot \alpha)$; also $\cot \alpha + \cot \beta_2 = 2 (\cot \alpha_1 - \cot \alpha)$ oder $\cot \alpha = \frac{2}{3} (\cot \alpha_1 - \frac{1}{2} \cot \beta_2)$ (2); wenn $\cot \varphi = \frac{1}{2} \cot \beta_2$ gesetzt wird, so ist $\cot \alpha = \dfrac{2 \sin (\varphi - \alpha_1)}{3 \sin \alpha_1 \sin \varphi}$. Setzt man den unter (2) für $\cot \alpha$ gefundenen Wert in (1) ein, oder entwickelt man direkt $\cot \beta = \frac{2}{3} (\cot \beta_2 - \frac{1}{2} \cot \alpha_1)$ (3),

Hosted by Google

ſo iſt, wenn $\cot\psi = \frac{1}{2}\cot\alpha_1$ geſetzt wird, $\cot\beta = \frac{2\sin(\psi-\beta_2)}{3\sin\beta_2\ \sin\psi}$.

Nachdem α und β berechnet, ſind die meiſten Aufgaben auf die von § 14, A zurückgeführt.

Außer α_1 und β_2 iſt noch gegeben:

148. r	154. h_a	159. w_c	164. $\triangle$
149. a	155. $h_b + h_a$	160. u	165. $a^2 + b^2$
150. a + b	156. $h_b - h_a$	161. u — v	166. $a^2 - b^2$
151. a — b	157. p	162. ϱ	167. $a^2 + b^2 - c^2$
152. s	158. p — q	163. ϱ_c	168. ab.
153. s — c			

c) In den folgenden Aufgaben ſind $\angle(t_a t_c)$ und $\angle(t_b t_c)$ gegeben, mithin auch die Winkel **ASF** und **BSF**, welche im $\triangle$ **ASB** dieſelbe Stellung einnehmen, wie γ_1 und γ_2 im $\triangle$ **ABC**, daher nach **A**, b) aus ihnen α_1 und β_2 und hieraus nach **C**, b) wieder α und β zu berechnen ſind, wodurch die meiſten Aufgaben auf die von **C**, a) oder § 14, **A** zurückgeführt ſind. Außer $\angle(t_a t_c)$ und $\angle(t_b t_c)$ iſt noch gegeben:

169. r	176. h_a	183. u — v	190. ab
170. c	177. $h_b + h_a$	184. ϱ	191. t_a (115)
171. a	178. $h_b - h_a$	185. ϱ_c	192. t_c (136)
172. a + b	179. p	186. $\triangle$	193. h_c (122)
173. a — b	180. p — q	187. $a^2 + b^2$	194. $t_a + t_b$ (125)
174. s	181. w_c	188. $a^2 - b^2$	195. $t_a - t_b$ (126)
175. s — c	182. u	189. $a^2 + b^2 - c^2$	

196. t_a, t_b, t_c. Hierbei iſt zu bemerken, daß $\triangle = \frac{1}{3}\sqrt{(t_a + t_b + t_c)(-t_a + t_b + t_c)(t_a - t_b + t_c)(t_a + t_b - t_c)}$.

D. Aufgaben, in denen die Winkel γ und ε gegeben ſind.

Aus γ und ε können die Winkel des Dreiecks berechnet werden; es iſt nämlich $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}$, mithin $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma_1)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma_2)}$ oder $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma_1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2$, woraus $\alpha-\gamma_1$ und $\beta-\gamma_2$ nach § 6, 9 zu berechnen ſind, da $\frac{1}{2}(\beta-\gamma_2) + \frac{1}{2}(\alpha-\gamma_1) = \frac{1}{2}\pi - \gamma$ iſt. Oder es iſt nach **A**, b) $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$, woraus ebenfalls nach § 6, 9 $\gamma_1 - \gamma_2$ und $\alpha - \beta$ zu berechnen ſind, da $\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ iſt. Auf beiderlei Weiſe kann man alſo α und β aus γ und ε berechnen.

Außer γ und ε iſt noch gegeben:

Hosted by Google

197. r 204. h_c 211. u 217. $\triangle$
198. c 205. h_a 212. $u - v$ 218. $a^2 + b^2$
199. a 206. $h_b + h_a$ 213. t_c 219. $a^2 - b^2$
200. $a + b$ 207. $h_b - h_a$ 214. t_a 220. $a^2 + b^2 - c^2$
201. $a - b$ 208. p 215. ϱ 221. ab
202. s 209. $p - q$ 216. ϱ_c 222. $c, \varepsilon, \angle(t_a t_b)$ (198).
203. $s - c$ 210. w_c

E. Aufgaben, bei deren Lösung eine Relation zwischen t_a und q zur Anwendung kommt.

Es ist $q = b \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{4 t_a^2 - a^2}{4c}$. Bei den Aufgaben, in welchen $a^2 - b^2$ gegeben, ist zu beachten, daß $a^2 - b^2 = c(p - q)$ ist.

223. p, q, t_a. 225. $a^2 - b^2, c, t_a$.
224. a, t_a, q. 226. $a^2 - b^2, p - q, t_a$.

F. Aufgaben, in denen h_a, t_a und $a \neq b$ gegeben.

227. $a + b, h_a, t_a$. Aufl. Es sei $\angle(a\, t_a) = \varepsilon_1$, so ist $\sin \varepsilon_1 = \frac{h_a}{t_a}$ (1). Aus $\frac{a}{2 t_a} = \frac{\sin(\varepsilon_1 + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\varepsilon_1 - \beta)}{\sin \beta}$ folgt $\cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1 = \cot \beta$ (a); und aus $(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma = c \cos \frac{1}{2}\delta$ und $h_a = c \sin \beta$, folgt $\frac{(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma}{h_a} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \beta}$; hierin $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - (\beta + \frac{1}{2}\gamma)$ gesetzt, giebt $\cot \beta = \frac{a + b}{h_a} - \cot \frac{1}{2}\gamma$ (b). Aus (a) und (b) ergiebt sich $\cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a + b}{h_a} - \cot \frac{1}{2}\gamma$ (c), woraus γ auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen ist. a) $\frac{\cot \frac{1}{2}\gamma^2 - 1}{2 \cot \frac{1}{2}\gamma} - \left(\frac{a + b}{h_a} - 2 \cot \varepsilon_1\right) + \cot \frac{1}{2}\gamma = 0$ oder $\cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{a + b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1\right) \cot \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3} = 0$; setzen wir $\frac{a + b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2), so ist $\cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4}{3} \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varphi \sin \varepsilon_1} \cot \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3} = 0$ (3). b) Aus c) ergiebt sich $\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a + b}{h_a} - \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma}$, mithin $\left(\frac{a + b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1\right) \sin \gamma - \cos \gamma = \frac{1}{2}$; hierin $\frac{a + b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2) gesetzt, giebt $\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1 \sin \varphi} \sin \gamma - \cos \gamma = \frac{1}{2}$ (3').

Hosted by Google

228. $a + b$, h_a, $\angle (a\, t_a)$ (227).

229. $a - b$, h_a, t_a. Aufl. $\sin \varepsilon_1 = \frac{h_a}{t_a}$ (1). Wie in 227 ergiebt sich $\cot \beta = \cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1$ (a); ferner aus $(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma = c \sin \frac{1}{2} \delta$ und $h_a = c \sin \beta$ folgt $\cot \beta = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$ (b); und aus (a) und (b) $\cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$, woraus wieder γ auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen ist. a) $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma} + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$, oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{a - b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1 \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{3} = 0$. hierin $\frac{a - b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2) gesetzt, giebt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{4}{3} \frac{\sin (\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1 \sin \varphi} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{3} = 0$ (3). b) Aus c) ergiebt sich $\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} - \left(\frac{a - b}{h_a} - 2 \cot \varepsilon_1 \right) = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin \gamma} = \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}$ oder $\cos \gamma - \left(\frac{a - b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1 \right) \sin \gamma = \frac{1}{2}$; wird $\frac{a - b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2) gesetzt, so ist $\cos \gamma - \frac{\sin (\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1 \sin \varphi} \sin \gamma = \frac{1}{2}$ (3′).

230. $a - b$, h_a, $\angle (a t_a)$ (229).

§ 17.

Aufgaben, in denen Verhältnisse gegeben.

A. Die meisten Aufgaben der §§ 14 und 15 können auch zur Bildung von Verhältnisaufgaben benutzt werden. Zunächst die unter B), in denen zwei Strecken und ein Winkel gegeben; ist nun statt der beiden Strecken das Verhältnis derselben gegeben und der Winkel, so ist dadurch die Gestalt des Dreiecks bestimmt, d. h. die Winkel können berechnet werden; zur vollständigen Berechnung des Dreiecks muß dann noch ein Stück gegeben sein, das aber in dem Verhältnis nicht vorkommt. So ist z. B. in § 14 Aufgabe 15 die folgende: r, $a + b$, γ; um hieraus eine Verhältnisaufgabe zu bilden, könnte man $r : a + b$, γ mit einem der folgenden Elemente verbinden, c, $a - b$, s, $s - c$, h_a, h_c, $h_b \pm h_a$, p, $p - q$, w_c, u, $u - v$, $\triangle$, $a^2 \pm b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$, ab, ϱ, ϱ_c, $\varrho_c \pm \varrho$, $\varrho_a \pm \varrho_b$, $h_c + \varrho_c$, $h_c - \varrho$;

Hosted by Google

nachdem die Winkel berechnet, sind die Aufgaben nach § 14, **A** oder § 15. **A** zu lösen.

Aus den Aufgaben der §§ 14 und 15, **C**, in denen sich unter den gegebenen Elementen kein Winkel befindet, aber aus zwei Elementen sofort ein Winkel berechnen läßt, können auf doppelte Weise Verhältnisaufgaben gebildet werden. Einmal kann nämlich nur ein Verhältnis und zwar das der beiden Elemente, welche zur direkten Berechnung des Winkels dienen, gegeben sein; ferner das in der Aufgabe selber gegebene Element, und als drittes ist noch ein neues hinzuzunehmen. Die Aufgaben können also in diesem Fall auf die der §§ 14 und 15, **B** zurückgeführt werden.

Dann können aber aus den Aufgaben der §§ 14 und 15, **C**, ebenso wie aus denen unter **D** auch so Verhältnisaufgaben gebildet werden, daß das Verhältnis aller drei in der Aufgabe vorkommenden Elemente als gegeben angenommen und noch ein neues Element hinzugenommen wird. Aus den beiden gegebenen Verhältnissen sind dann wie in den §§ 14 und 15 die Winkel, und mit Hinzunahme des dritten Elementes dann nach §§ 14 und 15, **A** die fehlenden Dreiecksstücke zu berechnen. Sollte in den Auflösungen der §§ 14 und 15 zunächst eine Seite berechnet sein, so ist zu beachten, daß in den vorliegenden Aufgaben das Verhältnis der Seite gefunden wird, in welchem sie zu einem der Elemente steht, deren Verhältnis gegeben. So kann man z. B. aus § 15, 65 die Verhältnisaufgabe $s - c : \varrho_a + \varrho_b, \gamma$ bilden; man findet nun nicht sogleich c, wie dort angegeben, vielmehr $c : \varrho_a + \varrho_b$, und hieraus und aus $s - c : \varrho_a + \varrho_b$ wiederum $s - c : c$, wodurch dann δ zu berechnen ist. Endlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn eins der Elemente $\triangle$, ab, $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ ein Glied des gegebenen Verhältnisses ist, das andere Glied das Quadrat einer Strecke sein muß, wenn es nicht eins der vorher erwähnten Elemente selber ist.

B. In den folgenden Aufgaben ist ein Verhältnis gegeben und außerdem noch zwei Elemente, unter denen sich aber kein Winkel befindet. Die Aufgaben sind dadurch zu lösen, daß man das gegebene Verhältnis durch γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausdrückt, und ferner sich eine zweite Gleichung für γ und δ durch Division der beiden außerdem noch gegebenen Elemente verschafft; aus beiden Gleichungen ist dann γ oder δ zu eliminieren. Statt γ und δ kann man auch zwei andere Winkel, etwa α und β benutzen.

a) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a : b = m : n}$ das gegebene Verhältnis. Ist c oder $u - v$ noch gegeben, so ist zu beachten, daß in beiden Fällen auch u und v bekannt ist, da $a : b = u : v$, mithin

Hosted by Google

u und v zu berechnen ist aus $m + n : m = c : u$ oder aus $m - n : m = u - v : u$; daher diese Aufgaben leicht auf frühere in § 14 zurückzuführen sind. Für die übrigen Aufgaben ist zu beachten, daß $\frac{m+n}{m-n} = \cot \frac{1}{2}\gamma \cot \frac{1}{2}\delta$ ist.

Außer $\mathbf{a:b = m:n}$ ist noch gegeben:

1. c, h_c (§ 14, 568)
2. h_c, u — v (§ 14, 568)
3. c, △ (§ 14, 608)
4. h_c, △ (§ 14, 608)
5. u — v, △ (§ 14, 608)
6. c, w_c (§ 14, 607)
7. u — v, w_c (§ 14, 607)
8. c, t_c (§ 14, 603)
9. u — v, t_c (§ 14, 603)
10. r, u — v (§ 14, 320)
11. p, q (§ 14, 582)
12. p — q, u — v (§ 14, 582).

13. p — q, h_c. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{(m^2 - n^2)\, h_c}{mn\,(p-q)}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2mn\,(p-q)}{(m^2-n^2)\,h_c} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma + 1 = 0$. 3. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{2mn\,(p-q)}{h_c\,(m+n)^2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta + \left[\frac{m-n}{m+n}\right]^2 = 0$.

14. h_c, t_c (13).

15. p — q, t_c (13).

16. t_c, △. 1. Aufl. $2mnt_c^2 \sin\gamma - 2mn \triangle \cos\gamma = \triangle\,(m^2 + n^2)$. 2. Aufl. Wird t_c um sich selber verlängert, so ist die Aufgabe auf (3) zurückgeführt.

16a. w_c, △. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{4mn \triangle}{(m+n)^2\, w_c^2}$.

17. r, h_c. Aufl. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{h_c}{2r}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m}{n}$.

18. ρ, h_c. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{m-n}{2\rho}\sqrt{\frac{h_c\,(h_c - 2\rho)}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho}{h_c - \rho}$, $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{\rho}{h_c - \rho}$, also γ und δ nach 9, 4 zu berechnen.

19. ρ_c, h_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{m+n}{2(h_c + \rho_c)}\sqrt{\frac{h_c\,(h_c + 2\rho_c)}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{h_c + \rho_c}{\rho_c} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{h_c + \rho_c}{\rho_c} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$; also γ und δ nach § 9, 4 zu berechnen.

20. ρ, ρ_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{m+n}{\rho_c + \rho}\sqrt{\frac{\rho\rho_c}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{\rho_c + \rho}{\rho_c - \rho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{\rho_c + \rho}{\rho_c - \rho} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$, also γ und δ nach § 9, 4 zu berechnen.

21. ρ_a, ρ_b. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{m-n}{\rho_a - \rho_b}\sqrt{\frac{\rho_a \rho_b}{mn}}$. 2. Aufl.

Hosted by Google

$\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$, also γ und δ nach § 9, 4 zu berechnen.

22. c, $h_b + h_a$ (§ 14, 610). 24. c, $h_b - h_a$ (§ 14, 611).
23. $u - v$, $h_b + h_a$ (§ 14, 610). 25. $u - v$, $h_b - h_a$ (§ 14, 611).

b) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{p : q = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ und $\frac{m+n}{m-n} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$. Außer $\mathbf{p : q = m : n}$ ist noch gegeben:

26. a, b. 1. Aufl. $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und $\frac{na}{mb} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ (§ 9, 3). 2. Aufl. $\cos\alpha = \frac{n}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}}$.

27. ϱ, h_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{h_c - \varrho}{\varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho}{h_c - \varrho} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ (§ 9, 4).

28. ϱ_c, h_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{h_c + \varrho_c}{\varrho_c} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_c}{h_c + \varrho_c} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ (§ 9, 4).

29. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ (§ 9, 4).

30. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{\varrho_a - \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ (§ 9, 4).

31. $a - b$, $u - v$. 1. Aufl. $\frac{a-b}{u-v} \cdot \frac{m+n}{m-n} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{u-v}{a-b} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ (§ 9, 4). 2. Aufl. $p - q = \frac{(a-b)^2}{u-v}$ (§ 14, 582).

32. r, h_c. Aufl. $\sin\alpha^4 + \frac{h_c^2\,(m^2 - n^2)}{4\,r^2 n^2}\sin\alpha^2 - \frac{m^2\,h_c^2}{4\,n^2 r^2} = 0$.

c) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{c : h_c = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}$. Außer $\mathbf{c : h_c = m : n}$ ist noch gegeben:

Hosted by Google

33. a, b. Aufl. $\sin\delta = \frac{n\,(a^2 - b^2)}{m\,a\,b}$.

34. a — b, u — v. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(a-b)^2 - (u-v)^2\}}{2\,n\,(u-v)^2}$.

35. a — b, p — q. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q)^2 - (a-b)^2\}}{2\,n\,(a-b)^2}$.

36. p — q, u — v. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q) - (u-v)\}}{2\,n\,(u-v)}$.

37. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{n\,(\varrho_c - \varrho)^2}{2\,m\,\varrho_c\,\varrho}$.

38 ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,m\,\varrho_a\,\varrho_b}{n\,(\varrho_a + \varrho_b)^2}$.

39. t_c, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{4\,n\,\triangle}{2\,n\,t_c^2 - m\,\triangle}$.

40. r, t_c. Aufl. $4\,n\,r^2 \sin 2\gamma - m\,r^2 \cos 2\gamma = m\,(2\,t_c^2 - r^2)$ (§ 3, 1).

d) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{c} : \mathbf{w}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}$. Außer $\mathbf{c} : \mathbf{w}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

41. a, b. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{4\,n^2\,a^2\,b^2 - m^2\,(a+b)^2\,(a-b)^2}}{m\,(a+b)^2}$.

2. Aufl. $\cos\gamma = \frac{n^2\,(a+b)^2\,(a^2+b^2) - 2\,m^2a^2b^2}{2\,a\,b\,\{n^2\,(a+b)^2 + m^2\,a\,b)\}}$. 3. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta = \frac{n\,(a^2 - b^2)}{2\,m\,a\,b}$.

42. a — b, p — q. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q)^2 - (a-b)^2\}}{2\,n\,(p-q)\,(a-b)}$.

43. u — v, a — b (42). 44. p — q, u — v (42).

45. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,m\,\varrho\,\varrho_c}{n\,(\varrho_c^2 - \varrho^2)}$.

46. ϱ, h_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\,h_c\,(h_c - 2\,\varrho)}{2\,n\,\varrho\,(h_c - \varrho)}$.

47. ϱ_c, h_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{m\,h_c\,(h_c + 2\,\varrho_c)}{2\,n\,\varrho_c\,(h_c + \varrho_c)}$.

e) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{c} : \mathbf{t}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m^2}{4\,n^2} = \frac{\sin\gamma^2}{1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2}$; zuweilen

Hosted by Google

kann man sich auch mit Vorteil des Ausdrucks $\frac{4n^2+m^2}{2m^2} = \frac{1+\cos\gamma\cos\delta}{\sin\gamma^2}$ bedienen. Außer $\mathbf{c:t_c = m:n}$ ist noch gegeben:

48. a, b. 1. Aufl. $\cos\gamma = \frac{(a^2+b^2)(4n^2-m^2)}{2ab(4n^2+m^2)}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{m^2(a+b)^2-4n^2(a-b)^2}{4n^2(a+b)^2-m^2(a-b)^2}$.

49. $a-b$, $u-v$. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{2m^2\{(u-v)^2-(a-b)^2\}}{(4n^2+m^2)(u-v)^2-2m^2(a-b)^2}$

$$\cos\gamma - \frac{(4n^2-m^2)(u-v)^2}{(4n^2+m^2)(u-v)^2-2m^2(a-b)^2} = 0.$$

50. $a-b$, $p-q$ (49) 51. $u-v$, $p-q$ (49).

52. ρ, ρ_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{8m^2\rho_c\rho}{(4n^2+m^2)(\rho_c-\rho)^2-2m^2(\rho_c+\rho)^2}$

$$\cos\gamma - \frac{(4n^2-m^2)(\rho_c-\rho)^2}{(4n^2+m^2)(\rho_c-\rho)^2-2m^2(\rho_c+\rho)^2} = 0.$$

53. h_c, ρ. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2m^2h_c(h_c-2\rho)}{\rho^2(4n^2-m^2)-2m^2h_c(h_c-2\rho)}$

$$\cos\gamma - \frac{\rho^2(4n^2-m^2)}{\rho^2(4n^2-m^2)-2m^2h_c(h_c-2\rho)} = 0.$$

54. h_c, ρ_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2m^2h_c(h_c+2\rho_c)}{\rho_c^2(4n^2+m^2)-2m^2(h_c+\rho_c)^2}\cos\gamma -$

$$\frac{\rho_c^2(4n^2-m^2)}{\rho_c^2(4n^2-m^2)-2m^2(h_c+\rho_c)^2} = 0.$$

f) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{c:a+b=m:n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 58 bis 72 können noch auf eine andere Art gelöst werden, indem man sie auf frühere in den §§ 14 und 15 zurückführt; aus den Formeln $(a+b)(a-b) = c(p-q)$ und $(a-b)^2 = (p-q)(u-v)$ folgt nämlich: $\frac{m}{n} = \frac{a-b}{p-q} = \frac{u-v}{a-b} = \sqrt{\frac{u-v}{p-q}}$, so daß, wenn in den Aufgaben $a-b$, $p-q$ oder $u-v$ eins der gegebenen Elemente ist, die beiden andern berechnet werden können. Außer $\mathbf{c:a+b=m:n}$ ist noch gegeben:

55. r, w_c. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{mnw_c}{2r(n^2-m^2)}$.

56. ρ, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{\rho(n+m)}{mw_c}$.

Hosted by Google

57. ρ_c, w_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{\rho_c (n-m)}{m w_c}$.

58. r, u — v. 1. Aufl. $\sin \delta = \frac{n^2 (u-v)}{2 r m^2}$. 2. Aufl. § 14, 328, 332.

59. h_c, p — q. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n^2-m^2)(p-q)}{2 n^2 h_c}$. 2. Aufl. § 14, 509.

60. h_c, t_c (59). 61. t_c, p — q (59).

62. h_c, u — v. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n^2-m^2)(u-v)}{2 m^2 h_c}$. 2. Aufl. § 14, 508.

63. $h_b - h_a$, p — q. 1. Aufl. $\sin \gamma = \frac{n (h_b - h_a)}{m (p-q)}$. 2. Aufl. § 14, 373.

64. $h_b - h_a$, u — v. 1. Aufl. $\sin \gamma = \frac{m (h_b - h_a)}{u (u-v)}$. 2. Aufl. § 14, 375.

65. p — q, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{m (n-m)(p-q)}{2 n^2 \rho}$. 2. Aufl. § 15, 681.

66. p — q, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{m (n+m)(p-q)}{2 n^2 \rho_c}$. 2. Aufl. § 15, 682.

67. a — b, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n^2-m^2)(a-b)}{2 mn h_c}$. 2. Aufl. § 14, 508, 509.

68. a — b, w_c. 1. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{(n^2-m^2)(a-b)}{2 mn w_c}$. 2. Aufl. § 14, 507.

69. a — b, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n-m)(a-b)}{2 n \rho}$. 2. Aufl. § 15, 681.

70. a — b, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n+m)(a-b)}{2 n \rho_c}$. 2. Aufl. § 15, 682.

71. u — v, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n-m)(u-v)}{2 m \rho}$. 2. Aufl. § 15, 687.

72. u — v, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(n+m)(u-v)}{2 m \rho_c}$. 2. Aufl. § 15, 688.

Hosted by Google

73. r, h_c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = m \sqrt{\frac{h_c}{2r(n^2 - m^2)}}$.

74. r, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin \gamma = \sqrt{\frac{m(h_b + h_a)}{2nr}}$.

75. r, ρ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\rho}{2r(n - m)}}$.

76. r, ρ_c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\rho_c}{2r(n + m)}}$.

77. h_c, $h_b + h_a$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n^2 - m^2)(h_b + h_a)}{mnh_c}}$.

78. h_c, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(n^2 - m^2)(\rho_a - h_c)^2}{n^2 h_c (2\rho_a - h_c)}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_a}{\rho_a - h_c}$ (§ 9, 4).

79. $h_b + h_a$, ρ. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n - m)(h_b + h_a)}{n\rho}}$.

80. $h_b + h_a$, ρ_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n + m)(h_b + h_a)}{n\rho_c}}$.

81. ρ_a, ρ_b. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m}{\rho_a + \rho_b}\sqrt{\frac{\rho_a \rho_b}{4n^2 - m^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a - \rho_b}$ (§ 9, 4).

82. r, ρ_a. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^4 - \left[1 - \frac{m^2\rho_a}{r(n^2 - m^2)}\right] \cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{m^2 \rho_a^2}{4r^2(n^2 - m^2)} = 0$.

g) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{c : a - b = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 83 bis 90 können auch noch auf eine zweite Art gelöst werden, indem sie auf frühere in den §§ 14 und 15 zurückgeführt werden; aus der Formel $c(p - q) = (a + b)(a - b)$ folgt $\frac{m}{n} = \frac{a + b}{p - q}$, so daß, wenn eins der Elemente $a + b$ oder $p - q$ gegeben, das andere berechnet werden kann. Außer $\mathbf{c : a - b = m : n}$ ist noch gegeben:

83. h_c, $p - q$. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2n^2 h_c}{(m^2 - n^2)(p - q)}$. 2. Aufl. § 14, 477.

84. h_c, t_c (83).

85. t_c, $p - q$ (83).

Hosted by Google

86. $h_b + h_a$, $p - q$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{n(h_b + h_a)}{m(p-q)}$. 2. Aufl. § 14, 357.

87. h_c, $a + b$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{2\,mnh_c}{(m^2 - n^2)(a+b)}$. 2. Aufl. § 14, 477.

88. $a + b$, w_c. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta^2 + \frac{(m^2 - n^2)(a+b)}{2\,mnw_c}\sin\frac{1}{2}\delta - 1 = 0$. 2. Aufl. § 14, 483.

89. $p - q$, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{2\,n^2\rho_a}{m(m+n)(p-q)}$. 2. Aufl. § 15, 660.

90. $a + b$, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{2\,n\rho_a}{(m+n)(a+b)}$. 2. Aufl. § 15, 660.

91. w_c, ρ_a Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{(m-n)\rho_a}{mw_c}$.

92. $h_b - h_a$, $u - v$. Aufl. $\sin\delta = \frac{n(h_b - h_a)}{m(u-v)}$.

93. r, h_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = m\sqrt{\frac{h_c}{2\,r(m^2 - n^2)}}$.

94. r, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{m(h_b - h_a)}{2\,nr}}$.

95. r, ρ_a. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\rho_a}{2\,r(m+n)}}$.

96. h_c, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m^2 - n^2)(h_b - h_a)}{mnh_c}}$.

97. h_c, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)\rho^2}{m^2 h_c(h_c - 2\rho)}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho}{h_c - \rho}$ (§ 9, 4).

98. h_c, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)\rho_c^2}{m^2 h_c(h_c + 2\rho_c)}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_c}{h_c + \rho_c}$ (§ 9, 4).

99. $h_b - h_a$, ρ_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m+n)(h_b - h_a)}{n\rho_a}}$.

100. ρ, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)(\rho_c - \rho)}{4\,m^2\rho\rho_c}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c + \rho}$ (§ 9, 4).

Hosted by Google

101. h_c, $u - v$. Aufl. $(m^2 - n^2)(u - v)\sin\delta - 2m^2 h_c \cos\delta = 2h_c(2n^2 - m^2)$ (§ 3, 1).

102. r, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta^2 + \frac{w_c n^2}{2r(m^2 - n^2)}\cos\frac{1}{2}\delta - 1 = 0$.

103. r, ϱ. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^4 - \left(1 - \frac{m^2\varrho}{(m^2 - n^2)r}\right)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{\varrho^2 m^2}{4r^2(m^2 - n^2)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{2m^2\varrho}{(m^2 - n^2)r}\cos\gamma + \frac{m^2\varrho(\varrho + 2r)}{(m^2 - n^2)r^2} - 1 = 0$.

104. r, ϱ_c. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^4 - \left(1 + \frac{m^2\varrho_c}{(m^2 - n^2)r}\right)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{m^2\varrho_c^2}{4r^2(m^2 - n^2)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2m^2\varrho_c}{(m^2 - n^2)r}\cos\gamma - \frac{m^2\varrho_c(2r - \varrho_c)}{(m^2 - n^2)r^2} - 1 = 0$.

h) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b : p - q = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 105 bis 117 können noch auf frühere in den §§ 14 und 15 zurückgeführt werden; aus der Formel $(a + b)(a - b) = c(p - q)$ folgt nämlich: $\frac{m}{n} = \frac{c}{a - b}$; so daß, wenn eine der Größen c oder $a - b$ gegeben ist, die andere leicht berechnet werden kann. Die Aufgaben 120 bis 133 sind ganz ebenso wie die von g) zu lösen, da auch hier das gegebene Verhältnis $= \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ ist. Außer $\mathbf{a + b : p - q = m : n}$ ist noch gegeben:

105. c, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c(m^2 - n^2)}{2m^2 h_c}$. 2. Aufl. § 14, 452.

106. $a - b$, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{(m^2 - n^2)(a - b)}{2mnh_c}$. 2. Aufl. § 14, 452.

107. c, $\triangle$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c^2(m^2 - n^2)}{4m^2\triangle}$. 2. Aufl. § 14, 453.

108. $a - b$, $\triangle$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{(m^2 - n^2)(a - b)^2}{4n^2\triangle}$. 2. Aufl. § 14, 453.

109. c, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{m(h_b - h_a)}{nc}$. 2. Aufl. § 14, 368.

Hosted by Google

110. c, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin\delta = \frac{n(h_b + h_a)}{mc}$. 2. Aufl. § 14, 457.

111. $a - b$, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin\delta = \frac{n^2(h_b + h_a)}{m^2(a - b)}$. 2. Aufl. § 14, 457.

112. c, ϱ. 1. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\delta = \frac{4m^2\varrho^2 + c^2(m^2 - n^2)}{4mnc\varrho}$. 2. Aufl. § 15, 322.

113. $a - b$, ϱ. 1. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\delta = \frac{4n^2\varrho^2 + (m^2 + n^2)(a - b)^2}{4n^2\varrho(a - b)}$. 2. Aufl. § 15, 322.

114. c, ϱ_c. 1. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\delta = \frac{4m^2\varrho_c^2 + c^2(m^2 - n^2)}{4mnc\varrho_c}$. 2. Aufl. § 15, 335.

115. $a - b$, ϱ_c. 1. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\delta = \frac{4n^2\varrho_c^2 + (m^2 - n^2)(a - b)^2}{4n^2\varrho_c(a - b)}$. 2. Aufl. § 15, 335.

116. c, ϱ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c(m + n)}{2m\varrho_a}$. 2. Aufl. § 15, 679.

117. $a - b$, ϱ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{(m + n)(a - b)}{2n\varrho_a}$. 2. Aufl. § 15, 679.

118. c, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{c^2(m^2 - n^2)^2 + 4m^2w_c^2(m^2 + n^2)}{4m^2n^2w_c^2}$

$\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{m^2}{n^2} = 0.$

119. $a - b$, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{4n^2w_c^2(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2)^2(a - b)^2}{4n^4w_c^2}$

$\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{m^2}{n^2} = 0.$

120. w_c, ρ_a (91) 125. h_c, $h_b - h_a$ (96) 130. h_c, $u - v$ (101)
121. $h_b - h_a$, $u - v$ (92) 126. h_c, ρ (97) 131. r, w_c (102)
122. r, h_c (93) 127. h_c, ρ_c (98) 132. r, ρ (103)
123. r, $h_b - h_a$ (94) 128. $h_b - h_a$, ρ_a (99) 133. r, ρ_c (104).
124. r, ρ_a (95) 129. ρ, ρ_c (100)

i) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a - b : p - q = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$. In den Aufgaben 134 bis 136 ist $u - v$ gegeben; da durch $\frac{m}{n} = \frac{u - v}{a - b} = \sqrt{\frac{u - v}{p - q}}$ eins der Elemente $a - b$ oder $p - q$ berechnet werden kann, so können sie

Hosted by Google

auch noch auf frühere in § 14 zurückgeführt werden. Dasselbe ist bei den Aufgaben 137 bis 151 der Fall, in denen c oder a + b eins der gegebenen Elemente ist; da $(a + b)(a - b) = c(p - q)$, also $\frac{m}{n} = \frac{c}{a+b}$ ist, so kann, wenn eine der Größen c oder a + b gegeben ist, die andere leicht berechnet und so die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt werden. Die Aufgaben 152 bis 164 sind ebenso wie die von f) zu lösen, da auch hier das gegebene Verhältnis $= \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ ist. Außer **a − b : p − q = m : n** ist noch gegeben:

134. r, u − v. 1. Aufl. 58. 2. Aufl. § 14, 331.

135. $h_b - h_a$, u − v. 1. Aufl. 64. 2. Aufl. § 14, 376, 378.

136. h_c, u − v. 1. Aufl. 62. 2. Aufl. § 14, 515, 516.

137. c, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin \gamma = \frac{m(h_b + h_a)}{nc}$. 2. Aufl. § 14, 354.

138. c, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m^2 h_c}{c(n^2 - m^2)}$. 2. Aufl. § 14, 450.

139. a + b, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2mnh_c}{(n^2 - m^2)(a + b)}$. 2. Aufl. § 14, 450.

140. c, △. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{4m^2 \triangle}{c^2(n^2 - m^2)}$. 2. Aufl. § 14, 451.

141. a + b, △. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{4n^2 \triangle}{(n^2 - m^2)(a + b)^2}$. 2. Aufl. § 14, 451.

142. c, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin \delta = \frac{n(h_b - h_a)}{mc}$. 2. Aufl. § 14, 455.

143. a + b, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \delta = \frac{n^2(h_b - h_a)}{m^2(a + b)}$. 2. Aufl. § 14, 455.

144. c, w_c. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{c(n^2 - m^2)}{2mnw_c}$. 2. Aufl. § 14, 454.

145. a + b, w_c. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{(n^2 - m^2)(a + b)}{2n^2 w_c}$. 2. Aufl. § 14, 454.

146. c, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m\rho}{c(n - m)}$. 2. Aufl. § 15, 323.

147. a + b, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2n\rho}{(n - m)(a + b)}$. 2. Aufl. § 15, 323.

148. c, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m\rho_c}{c(m + n)}$. 2. Aufl. 15, 309.

Hosted by Google

149. $a + b$, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2n\rho_c}{(m+n)(a+b)}$. 2. Aufl. § 15, 309.

150. c, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{4m^2\rho_a^2 - c^2(n^2-m^2)}{4mnc\rho_a}$. 2. Aufl. § 15, 308.

151. $a + b$, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{4n^2\rho_a^2 - (n^2-m^2)(a+b)^2}{4n^2\rho_a(a+b)}$. 2. Aufl. § 15, 308.

152. r, w_c (55)
153. w_c, ρ (56)
154. w_c, ρ_c (57)
155. r, h_c (73)
156. r, $h_b + h_a$ (74)
157. r, ρ (75)
158. r, ρ_c (76)
159. h_c, $h_b + h_a$ (77)
160. h_c, ρ_a (78)
161. $h_b + h_a$, ρ (79)
162. $h_b + h_a$, ρ_c (80)
163. ρ_a, ρ_b (81)
164. r, ϱ_a (82).

k) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{u - v : a - b = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$. In den Aufgaben 165 bis 170 ist $p - q$ gegeben; da durch $\frac{m}{n} = \frac{a-b}{p-q} = \sqrt{\frac{u-v}{p-q}}$ eins der Elemente $a - b$ oder $u - v$ berechnet werden kann, so können sie auf frühere in § 14 und 15 zurückgeführt werden. Dasselbe ist bei den Aufgaben 173 bis 187 der Fall, in denen c oder $a + b$ eins der gegebenen Elemente ist; denn das eine kann aus dem anderen durch $\frac{m}{n} = \frac{c}{a+b}$ berechnet werden. Die erwähnten Aufgaben, so wie 188 bis 200 sind teils ebenso wie die von f), teils wie die von i) zu lösen. Außer $\mathbf{u - v : a - b = m : n}$ ist noch gegeben:

165. h_c, $p - q$ (59)
166. h_c, t_c (60)
167. t_c, $p - q$ (61)
168. $h_b - h_a$, $p - q$ (63)
169. $p - q$, ρ (65)
170. $p - q$, ρ_c (66).

171. $a + b$, $p - q$. 1. Aufl. $\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$; $\frac{a+b}{p-q} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ § 9, 4. 2. Aufl. § 14, 473.

172. p, q. 1. Aufl. $\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$; $\frac{n(p+q)}{m(p-q)} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ § 9, 4. 2. Aufl. § 14, 473.

173. c, $h_b + h_a$ (137)
174. c, h_c (138)
175. $a + b$, h_c (139)
176. c, $\triangle$ (140)
177. $a + b$, $\triangle$ (141)
178. c, $h_b - h_a$ (142)
179. $a + b$, $h_b - h_a$ (143)
180. c, w_c (144)
181. $a + b$, w_c (145)
182. c, ρ (146)
183. $a + b$, ρ (147)
184. c, ρ_c (148)
185. $a + b$, ρ_c (149)
186. c, ρ_a (150)
187. $a + b$, ρ_a (151)
188. r, w_c (55)
189. w_c, ρ (56)
190. w_c, ρ_c (57)

Hosted by Google

191. r, h_c (73)
192. r, $h_b + h_a$ (74)
193. r, ρ (75)
194. r, ρ_c (76)
195. h_c, $h_b + h_a$ (77)
196. h_c, ρ_a (78)
197. $h_b + h_a$, ρ (79)
198. $h_b + h_a$, ρ_c (80)
199. ρ_a, ρ_b (81)
200. r, ρ_c (82).

l) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{u - v : p - q = m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben können ebenso wie die von k) auf die von f) und i) zurückgeführt werden, unter Berücksichtigung der Formeln $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{a-b}{p-q} = \frac{u-v}{a-b}$ und $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{a+b}$. Außer $\mathbf{u - v : a - b = m : n}$ ist noch gegeben:

201. a, b. Aufl. $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{a+b}$, also a, b, c bekannt.
202. c, a − b. Aufl. wie 201.
203. h_c, a − b (67)
204. a − b, w_c (68)
205. a − b, ρ (69)
206. a − b, ρ_c (70)
207. c, $h_b + h_a$ (137)
208. c, h_c (138)
209. a + b, h_c (139)
210. c, △ (140)
211. a + b, △ (141)
212. c, $h_b - h_a$ (142)
213. a+b, $h_b - h_a$ (143)
214. c, w_c (144)
215. a + b, w_c (145)
216. c, ρ (146)
217. a + b, ρ (147)
218. c, ρ_c (148)
219. a + b, ρ_c (149)
220. c, ρ_a (150)
221. a + b, ρ_a (151)
222. r, w_c (55)
223. w_c, ρ (56)
224. w_c, ρ_c (57)
225. r, h_c (73)
226. r, $h_b + h_a$ (74)
227. r, ρ (75)
228. r, ρ_c (76)
229. h_c, $h_b + h_a$ (77)
230. h_c, ρ_a (78)
231. $h_b + h_a$, ρ (79)
232. $h_b + h_a$, ρ_c (80)
233. ρ_a, ρ_b (81)
234. r, ρ_a (82).

m) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_c : \varrho = \mathbf{m : n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m-n}{m+n} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben können auf die von f) und i) zurückgeführt werden unter Berücksichtigung der Formeln $\frac{m-n}{m+n} = \frac{a-b}{p-q} = \frac{u-v}{a-b}$ und $\frac{m-n}{m+n} = \frac{c}{a+b}$. Außer $\varrho_c : \varrho = \mathbf{m : n}$ ist noch gegeben:

235. a, b (201)
236. c, a − b (202)
237. h_c, a − b (67)
238. a − b, w_c (68)
239. r, u − v (58)
240. h_c, u − v (62)
241. $h_b - h_a$, u − v (64)
242. h_c, p − q (59)
243. h_c, t_c (60)
244. t_c, p − q (61)
245. $h_b - h_a$, p − q (63)
246. a+b, p − q (171)
247. p, q (172)
248. c, $h_b + h_a$ (137)
249. c, h_c (138)
250. h_c, a + b (139)
251. c, △ (140)
252. a + b, △ (141)
253. c, $h_b - h_a$ (142)
254. a+b, $h_b - h_a$ (143)
255. c, w_c (144)

Hosted by Google

256. $a + b$, w_c (145) 260. r, h_c (73) 263. h_c, ρ_a (78)
257. c, ρ_a (150) 261. r, $h_b + h_a$ (74) 264. ρ_a, ρ_b (81)
258. $a + b$, ρ_a (151) 262. h_c, $h_b + h_a$ (77) 265. r, ρ_a (82).
259. r, w_c (55)

n) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m+n}{m-n} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 270 bis 292 können auf die von g) und h) zurückgeführt werden mittelst der Formeln $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b}$ und $\frac{m+n}{m-n} = \frac{a+b}{p-q}$. Außer $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

266. a, b. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b}$; also sind a, b, c, bekannt.
267. c, $a + b$. Aufl. wie 266.
268. $a - b$, $p - q$. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b} = \frac{a+b}{p-q}$; also sind a, b, c bekannt.
269. p, q. Aufl. wie 268.

270. h_c, $p - q$ (83) 278. r, $h_b - h_a$ (94) 286. r, ρ_c (104)
271. h_c, t_c (84) 279. h_c, $h_b - h_a$ (96) 287. c, h_c (105)
272. t_c, $p - q$ (85) 280. h_c, ρ (97) 288. $a - b$, h_c (106)
273. $h_b + h_a$, $p - q$ (86) 281. h_c, ρ_c (98) 289. c, $\triangle$ (107)
274. $a + b$, h_c (87) 282. ρ, ρ_c (100) 290. c, $h_b - h_a$ (109)
275. $a + b$, w_c (88) 283. h_c, $u - v$ (101) 291. c, $h_b + h_a$ (110)
276. $h_b - h_a$, $u - v$ (92) 284. r, w_c (102) 292. $a - b$, $h_b + h_a$ (111).
277. r, h_c (93) 285. r, ρ (103)

o) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{n-m} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 297 bis 317 können auf die von f) und i) zurückgeführt werden mittelst der Formeln $\frac{m}{n-m} = \frac{c}{a+b} = \frac{a-b}{p-q}$. In den Aufgaben 293 bis 296 können durch eben diese Formeln leicht die drei Seiten des Dreiecks berechnet werden. Außer $\varrho : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

293. a, b 300. $h_b - h_a$, $p - q$ (63) 307. $h_b + h_a$, ρ_c (80)
294. c, $a - b$ 301. $h_b - h_a$, $u - v$ (64) 308. ρ_a, ρ_b (81)
295. $a + b$, $p - q$ 302. $p - q$, ρ_c (66) 309. r, ρ_a (82)
296. p, q 303. $a - b$, w_c (68) 310. c, $h_b + h_a$ (137)
297. r, w_c (55) 304. $a - b$, ρ_c (70) 311. c, $h_b - h_a$ (142)
298. w_c, ρ_c (57) 305. r, $h_b + h_a$ (74) 312. $a + b$, $h_b - h_a$ (143)
299. r, $u - v$ (58) 306. r, ρ_c (76) 313. c, w_c (144).

Hosted by Google

314. $a + b$, w_c, (145) 316. $a + b$, ρ_c, (149) 317. $a + b$, ρ_a (151).
315. c, ρ_c (148)

p) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_c : \mathbf{h_c} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; es ist $\frac{m}{m+n} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben sind ebenso zu lösen, wie die von o). Außer $\varrho_c : \mathbf{h_c} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

318. a, b (293)
319. c, $a - b$ (294)
320. $a+b$, $p-q$ (295)
321. p, q (296)
322. r, w_c (55)
323. w_c, ρ (56)
324. r, $u - v$ (58)
325. $h_b - h_a$, $p - q$ (63)
326. $h_b - h_a$, $u - v$ (64)
327. $p - q$, ρ (65)
328. $a - b$, w_c (68)
329. $a - b$, ρ (69)
330. r, $h_b + h_a$ (74)
331. r, ρ (75)
332. $h_b + h_a$, ρ (79)
333. ρ_a, ρ_b (81)
334. r, ρ_a (82)
335. c, $h_b + h_a$ (137)
336. c, $h_b - h_a$ (142)
337. $a+b$, $h_b - h_a$ (143)
338. c, w_c (144)
339. $a + b$, w_c (145)
340. c, ρ (146)
341. $a + b$, ρ (147)
342. $a + b$, ρ_a (151).

q) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{t_a} : \mathbf{t_b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältnis; dieselben sind unter Berücksichtigung des § 16, C, a) Gesagten auf a) zurückzuführen. Außer $\mathbf{t_a} : \mathbf{t_b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

343. c, h_c (1)
344. c, $\triangle$ (3)
345. h_c, $\triangle$ (4)
346. c, t_c (8)
347. t_c, $\triangle$ (16)
348. p, q (11)
349. $p - q$, h_c (13)
350. h_c, t_c (14)
351. $p - q$, t_c (15).

C. In den folgenden Aufgaben sind zwei Verhältnisse gegeben; durch dieselben sind stets die Winkel zu berechnen und zwar ganz in derselben Weise, wie die entsprechenden Aufgaben in B), in denen eins der beiden Verhältnisse gegeben und außerdem die beiden Elemente, welche das andere Verhältnis bilden. Sind z. B. die beiden Verhältnisse $a : b$ und $c : h_c$ gegeben, so ist diese Aufgabe auf 33) zurückzuführen, in welcher a, b, $c : h_c$ gegeben; denn aus $c : h_c$ erhält man eine Gleichung für γ und δ; eine zweite ergiebt sich, wie in der Vorbemerkung zu B) gesagt, durch Division von a und b, also auch durch ihr Verhältnis. Außerdem muß nun noch ein Element gegeben sein, so daß schließlich die Aufgaben auf die von § 14, A) und § 15, A) zurückgeführt werden, und wenn t_c gegeben, auf § 16, 1.

a) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{h_c} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (1) zu berechnen. Außerdem ist noch gegeben:

352. r
353. h_a
354. $h_b + h_a$
355. $h_b - h_a$
356. p
357. $p - q$
358. u
359. $u - v$
361. t_c
360. w_c
362. $\triangle$
363. ρ
364. ρ_c.

Hosted by Google

b) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{w}_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (6) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

365. r	368. $h_b - h_a$	371. u	374. △
366. h_c	369. p	372. u — v	375. ρ
367. $h_b + h_a$	370. p — q	373. t_c	376. ρ_c.

c) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{t}_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (8) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

377. r	380. $h_b - h_a$	383. u	386. △
378. h_c	381. p	384. u — v	387. ρ
379. $h_b + h_a$	382. p — q	385. w_c	388. ρ_c.

d) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{p} : \mathbf{q} = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (11) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

389. r	393. $h_b + h_a$	396. u — v	399. △
390. s	394. $h_b - h_a$	397. w_c	400. ρ
391. s — c	395. u	398. t_c	401. ρ_c.
392. h_c			

e) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho : \mathbf{h}_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gebenenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (18) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

402. r	406. $h_b + h_a$	410. u	413. t_c
403. c	407. $h_b - h_a$	411. u — v	414. △
404. s	408. p	412. w_c	415. ρ_c
405. s — c	409. p — q		

f) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho_c : \mathbf{h}_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (19) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

416. r	420. $h_b + h_a$	424. u	427. t_c
417. c	421. $h_b - h_a$	425. u — v	428. △
418. s	422. p	426. w_c	429. ρ.
419. s — c	423. p — q		

g) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho : \varrho_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (20) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

430. r	434. h_c	438. p — q	442. t_c
431. c	435. $h_b + h_a$	439. u	443. △
432. s	436. $h_b - h_a$	440. u — v	444. ρ_a.
433. s — c	437. p	441. w_c	

h) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (21) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

445. r	449. h_c	453. p — q	457. t_c
446. c	450. $h_b + h_a$	454. u	458. △
447. s	451. $h_b - h_a$	455. u — v	459. ρ
448. s — c	452. p	456. w_c	460. ρ_c.

Hosted by Google

i) $\mathbf{p : q = m : n}$ und $\varrho : h_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (27) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

461. r 465. $s - c$ 468. u 471. t_c
462. $a + b$ 466. $h_b + h_a$ 469. $u - v$ 472. $\triangle$
463. $a - b$ 467. $h_b - h_a$ 470. w_c 473. ϱ_c
464. s

k) $\mathbf{p : q = m : n}$ und $\varrho_c : h_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (28) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

474. r 478. $s - c$ 481. u 484. t_c
475. $a + b$ 479. $h_b + h_a$ 482. $u - v$ 485. $\triangle$
476. $a - b$ 480. $h_b - h_a$ 483. w_c 486. ϱ.
477. s

l) $\mathbf{p : q = m : n}$ und $\varrho : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (29) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

487. r 491. $s - c$ 495. u 498. t_c
488. $a + b$ 492. h_c 496. $u - v$ 499. $\triangle$
489. $a - b$ 493. $h_b + h_a$ 497. w_c 500. ϱ_a.
490. s 494. $h_b - h_a$

m) $\mathbf{p : q = m : n}$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (30) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

501. r 505. $s - c$ 509. u 513. $\triangle$
502. $a + b$ 506. h_c 510. $u - v$ 514. ϱ
503. $a - b$ 507. $h_b + h_a$ 511. w_c 515. ϱ_c.
504. s 508. $h_b - h_a$ 512. t_c

n) $\mathbf{c : h_c = m : n}$ und $\varrho : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (37) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

516. r 520. $s - c$ 524. $p - q$ 528. t_c
517. $a + b$ 521. $h_b + h_a$ 525. u 529. $\triangle$
518. $a - b$ 522. $h_b - h_a$ 526. $u - v$ 530. ϱ_a.
519. s 523. p 527. w_c

o) $\mathbf{c : h_c = m : n}$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (38) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

531. r 535. $s - c$ 539. $p - q$ 543. t_c
532. $a + b$ 536. $h_b + h_a$ 540. u 544. $\triangle$
533. $a - b$ 537. $h_b - h_a$ 541. $u - v$ 545. ϱ
534. s 538. p 542. w_c 546. ϱ_c

p) $\mathbf{c : a + b = m : n}$ und $\mathbf{r : \varrho = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (75) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

547. $a - b$ 549. $s - c$ 551. $h_b + h_a$ 553. p
548. s 550. h_c 552. $h_b - h_a$ 554. $p - q$

Hosted by Google

555. u 557. w_c 559. △ 560. ρ_c.
556. u — v 558. t_c

q) $\mathbf{c : a + b = m : n}$ und $\mathbf{r : \varrho_c = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (76) zu berechnen; außerdem ist noch gegeben:

561. a — b 565. $h_b + h_a$ 569. u 572. t_c
562. s 566. $h_b - h_a$ 570. u — v 573. △
563. s — c 567. p 571. w_c 574. ρ.
564. h_c 568. p — q

r) $\mathbf{c : a + b = m : n}$ und $\mathbf{\varrho_a : \varrho_b = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (81) zu berechnen; außerdem ist noch gegeben:

575. a — b 579. $h_b + h_a$ 583. u 587. △
576. s 580. $h_b - h_a$ 584. u — v 588. ρ
577. s — c 581. p 585. w_c 589. ρ_c
578. h_c 582. p — q 586. t_c

s) $\mathbf{c : a - b = m : n}$ und $\mathbf{h_c : \varrho = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (97) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

590. r 594. $h_b + h_a$ 598. u 601. t_c
591. a + b 595. $h_b - h_a$ 599. u — v 602. △
592. s 596. p 600. w_c 603. ρ_c
593. s — c 597. p — q

t) $\mathbf{c : a - b = m : n}$ und $\mathbf{h_c : \varrho_c = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (98) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

604. r 608. $h_b + h_a$ 612. u 615. t_c
605. a + b 609. $h_b - h_a$ 613. u — v 616. △
606. s 610. p 614. w_c 617. ρ.
607. s — c 611. p — q

u) $\mathbf{c : a - b = m : n}$ und $\mathbf{\varrho : \varrho_c = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (100) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

618. r 622. h_c 626. p — q 630. t_c
619. a + b 623. $h_b + h_a$ 627. u 631. △
620. s 624. $h_b - h_a$ 628. u — v 632. ρ_a.
621. s — c 625. p 629. w_c

v) $\mathbf{c : a - b = m : n}$ und $\mathbf{r : \varrho = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (103) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

633. a + b 637. $h_b + h_a$ 641. u 644. t_c
634. s 638. $h_b - h_a$ 642. u — v 645. △
635. s — c 639. p 643. w_c 646. ρ_c
636. h_c 640. p — q

w) $\mathbf{c : a - b = m : n}$ und $\mathbf{r : \varrho_c = m' : n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (104) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

647. a + b 648. s 649. s — c 650. h_c

Hosted by Google

651. $h_b + h_a$	654. $p - q$	657. w_c	659. $\triangle$
652. $h_b - h_a$	655. u	658. t_c	660. ρ.
653. p	656. $u - v$		

x) $\varrho_c : \varrho = \mathfrak{m} : \mathfrak{n}$ und $\varrho_a : \varrho_b = \mathfrak{m}' : \mathfrak{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (264) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

661. r	665. s	669. $h_b - h_a$	673. $u - v$
662. c	666. $s - c$	670. p	674. w_c
663. $a + b$	667. h_c	671. $p - q$	675. t_c
664. $a - b$	668. $h_b + h_a$	672. u	676. $\triangle$.

y) $\varrho_a : \varrho_b = \mathfrak{m} : \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{h}_c : \varrho = \mathfrak{m}' : \mathfrak{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (280) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

677. r	681. s	685. p	689. w_c
678. c	682. $s - c$	686. $p - q$	690. t_c
679. $a + b$	683. $h_b + h_a$	687. u	691. $\triangle$
680. $a - b$	684. $h_b - h_a$	688. $u - v$	692. ρ_c.

z) $\varrho_a : \varrho_b = \mathfrak{m} : \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{h}_c : \varrho_c = \mathfrak{m}' : \mathfrak{n}'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (281) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

693. r	697. s	701. p	705. w_c
694. c	698. $s - c$	702. $p - q$	706. t_c
695. $a + b$	699. $h_b + h_a$	703. u	707. $\triangle$
696. $a - b$	700. $h_b - h_a$	704. $u - v$	708. ρ.

§ 18.

Aufgaben, in denen eine Relation zwischen den Winkeln besteht.

In den Aufgaben dieses Paragraphen soll entweder $\alpha = 2\beta$, oder $\alpha = 3\beta$, oder $\alpha = 4\beta$ sein, und außerdem müssen noch zwei Stücke des Dreiecks gegeben sein. Bei verschiedenen Aufgaben finden die Formeln $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$, $\sin 4\alpha = (4\sin\alpha - 8\sin\alpha^3)\cos\alpha$, $\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin\alpha^3 + 16\sin\alpha^5$, $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha = 8\cos\alpha^4 - 8\cos\alpha^2 + 1$, $\cos 5\alpha = 16\cos\alpha^5 - 20\cos\alpha^3 + 5\cos\alpha$ Anwendung.

a) Es sei $\alpha = 2\beta$. Die Aufgaben 1 bis 26 sind den §§ 14 und 15, C entnommen. Dort waren immer je zwei Dreiecksstücke aufgestellt, durch welche man sofort einen Winkel, d. h. γ oder δ berechnen kann; nimmt man die hier aufgestellte Bedingung hinzu, so findet man sofort eine Funktion von β und kann so α berechnen. Außer der Bedingung $\alpha = 2\beta$ ist nun gegeben:

1. a. h_c. Aufl. $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$.

Hosted by Google

2. p, h_c. Aufl. $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{p}$.

3. a, p. Aufl. $\cos\beta = \frac{p}{a}$.

4. c, r. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{c}{2r}$.

5. $p - q$, r. Aufl. $\sin\beta = \frac{p-q}{2r}$.

6. h_c, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{h_c}{w_c}$.

7. $a + b$, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{h_b + h_a}{a+b}$.

8. $a - b$, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{h_b - h_a}{a-b}$.

9. $\triangle$, $a^2 + b^2 - c^2$. Aufl. $\cot(\pi - 3\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$.

10. $\triangle$, ab. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{2\triangle}{ab}$.

11. $a^2 + b^2 - c^2$, ab. Aufl. $\cos(\pi - 3\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

12. ρ_c, s. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{\rho_c}{s}$.

13. ρ, $s - c$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{\rho}{s-c}$.

14. ρ_a, $s - c$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{s-c}{\rho_a}$.

15. c, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{\rho_c - \rho}{c}$.

16. r, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos\frac{3}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_c - \rho}{r}}$.

17. c, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{c}{\rho_a + \rho_b}$.

18. r, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\sin\frac{3}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_a + \rho_b}{r}}$.

19. $\rho_c - \rho$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \sqrt{\frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}}$.

20. $a + b$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{\rho_c + \rho}{a+b}$.

21. $a - b$, $\rho_a - \rho_b$. Aufl. $\cot\frac{3}{2}\beta = \frac{a-b}{\rho_a - \rho_b}$.

Hosted by Google

22. $a + b$, $\rho_a - \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho_a - \rho_b}{a + b}$.

23. $a - b$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{a - b}{\rho_c + \rho}$

24. $h_b + h_a$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\sin \frac{3}{2}\beta = \sqrt{\frac{h_b + h_a}{2\,(\rho_c + \rho)}}$.

25. $h_b - h_a$, $\rho_a - \rho_b$. Aufl. $\cos \frac{3}{2}\beta = \sqrt{\frac{h_b - h_a}{2\,(\rho_a - \rho_b)}}$.

26. $u - v$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{u - v}{\rho_c - \rho}$.

27. a, b. Aufl. $\cos\beta = \frac{a}{2\,b}$.

28. h_a, h_b. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_b}{2\,h_a}$.

29. u, v. Aufl. $\cos\beta = \frac{u}{2\,v}$.

30. p, q. 1. Aufl. $\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}\beta^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{p - 2q}{p}}$. 2. Aufl. $\cos\beta = \frac{q}{p - q}$.

31. h_c, $p - q$. Aufl. $\sin\alpha = \frac{h_c}{p - q}$.

32. c, $a + b$. Aufl. $\frac{c}{a + b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\frac{3}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{4\cos\frac{1}{2}\beta^3 - 3\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = 2 + 2\cos\beta - 3$; $\cos\beta = \frac{a + b + c}{2\,(a + b)}$.

33. c, $a - b$. Aufl. $\cos\beta = \frac{c - (a - b)}{2\,(a - b)}$ ähnlich wie 32.

34. $a + b$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a + b) - (p - q)}{2\,(p - q)}$ ähnlich wie 32.

35. $a - b$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a - b) + (p - q)}{2\,(p - q)}$ ähnlich wie 32.

36. $a - b$, $u - v$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a - b) + (u - v)}{2\,(a - b)}$.

37. $u - v$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{\sqrt{u - v} + \sqrt{p - q}}{2\,\sqrt{p - q}}$.

38. ρ, h_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_c}{2\,(h_c - \rho)}$.

39. ρ_c, h_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_c + 2\,\rho_c}{2\,(h_c + \rho_c)}$.

Hosted by Google

40. ρ, ρ_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{\rho_c}{\rho_c + \rho}$.

41. ρ_a, ρ_b. Aufl. $\cos\beta = \frac{\rho_b}{\rho_a - \rho_b}$.

42. c, h_c. Aufl. $\frac{c}{h_c} = \frac{\sin 3\beta}{2 \sin\beta^2 \cos\beta} = \frac{1 + 2\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$; alſo $c \sin\alpha - 2 h_c \cos\alpha = h_c$ (§ 3, 1).

b) $\alpha = 3\beta$. Die Aufgaben 1 bis 26 können auch unter dieſer und jeder ähnlichen Bedingung, welche zwiſchen den Winkeln α und β ſtattfindet, gelöſt werden; da jedoch die Löſungen von denen der vorhergehenden Aufgaben nicht weſentlich verſchieden, ſo ſind die Aufgaben an dieſer Stelle nicht wieder aufgeführt. Unter der Bedingung, daß $\alpha = 3\beta$, iſt gegeben:

43. a, b. Aufl. $\frac{a}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 3 - 4\sin\beta^2 = 1 + 2\cos 2\beta$; alſo $\cos 2\beta = \frac{a - b}{2b}$.

44. h_a, h_b. Aufl. $\cos 2\beta = \frac{h_b - h_a}{2 h_a}$.

45. u, v. Aufl. $\cos 2\beta = \frac{u - v}{2v}$.

46. p, q. Aufl. $\frac{p + q}{p - q} = \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = 2\cos 2\beta$; alſo $\cos 2\beta = \frac{p+q}{2(p-q)}$.

47. ρ_a, ρ_b. Aufl. $\frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a - \rho_b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta$; alſo $\cos\beta = \frac{\rho_a + \rho_b}{2(\rho_a - \rho_b)}$.

48. c, a − b. Aufl. $\cos\beta = \frac{c}{2(a - b)}$.

49. a + b, p − q. Aufl. $\cos\beta = \frac{a + b}{2(p - q)}$.

50. c, a + b. Aufl. $\frac{c}{a + b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\cos 2\beta}{\cos\beta} = \frac{2\cos\beta^2 - 1}{\cos\beta}$; alſo $\cos\beta^2 - \frac{c}{2(a + b)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

51. a − b, p − q. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a - b}{2(p - q)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

52. a − b, u − v. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{u - v}{2(a - b)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

53. u − v, p − q. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u - v}{p - q}}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

Hosted by Google

54. ρ_c, ρ. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\rho_c - \rho}{2(\rho_c + \rho)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

55. ρ, h_c. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\rho_c}{2(h_c - \rho)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

56. ρ_c, h_c. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\rho_c}{2(\rho_c + h_c)}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

c) In den folgenden Aufgaben, die sämtlich auf quadratische Gleichungen führen, ist außer der Bedingung $\alpha = 4\beta$ noch gegeben:

57. p, q. 1. Aufl. $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\sin 5\beta}{\sin 3\beta} = \frac{5 - 20\sin\beta^2 + 16\sin\beta^4}{3 - 4\sin\beta^2}$;
also $\sin\beta^4 - \frac{2p-3q}{2(p-q)}\sin\beta^2 + \frac{p-4q}{8(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{q}{p-q}\cos\beta - \frac{p}{2(p-q)} = 0$.

58. c, a + b. 1. Aufl. $\frac{c}{a+b} = \frac{\cos\frac{5}{2}\beta}{\cos\frac{3}{2}\beta} = \frac{16\cos\frac{1}{2}\beta^4 - 20\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 5}{4\cos\frac{1}{2}\beta^2 - 3}$,
also $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5(a+b)+c}{4(a+b)}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5(a+b)+3c}{16(a+b)} = 0$.
2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a+b+c}{2(a+b)}\cos\beta - \frac{a+b-c}{4(a+b)} = 0$.

59. c, a − b. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5(a-b)-c}{4(a-b)}\sin\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3c-5(a-b)}{16(a-b)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{c-(a-b)}{2(a-b)}\cos\beta - \frac{a-b+c}{4(a-b)} = 0$.

60. a + b, p − q. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\beta^4 + \frac{(a+b)-5(p-q)}{4(p-q)}\sin\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3(a+b)-5(p-q)}{16(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a+b-(p-q)}{2(p-q)}\cos\beta - \frac{p-q+a+b}{4(p-q)} = 0$.

61. a − b, p − q. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5(p-q)+(a-b)}{4(p-q)}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5(p-q)+3(a-b)}{16(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{p-q+a-b}{2(p-q)}\cos\beta - \frac{p-q-(a-b)}{4(p-q)} = 0$.

62. a − b, u − v. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5(a-b)+(u-v)}{4(a-b)}$

Hosted by Google

$\cos \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5(a-b)+3(u-v)}{16(a-b)} = 0$. 2 Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a-b+u-v}{2(a-b)}\cos\beta - \frac{a-b-(u-v)}{4(a-b)} = 0$.

63. $u-v$, $p-q$. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5\sqrt{p-q}+\sqrt{u-v}}{4\sqrt{p-q}}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5\sqrt{p-q}+3\sqrt{u-v}}{16\sqrt{p-q}} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\sqrt{p-q}+\sqrt{u-v}}{2\sqrt{p-q}}\cos\beta - \frac{\sqrt{p-q}-\sqrt{u-v}}{4\sqrt{p-q}} = 0$.

64. ρ, ρ_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{3\rho_c+2\rho}{2(\rho_c+\rho)}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{4\rho_c+\rho}{8(\rho_c+\rho)} = 0$.

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\rho_c}{\rho_c+\rho}\cos\beta - \frac{\rho}{2(\rho_c+\rho)} = 0$.

65. ρ_a, ρ_b. 1. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{2\rho_a-3\rho_b}{2(\rho_a-\rho_b)}\sin\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{\rho_a-4\rho_b}{8(\rho_a-\rho_b)} = 0$.

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\rho_b}{\rho_a-\rho_b}\cos\beta - \frac{\rho_a}{2(\rho_a-\rho_b)} = 0$.

66. ρ, h_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5h_c-4\rho}{4(h_c-\rho)}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5h_c-2\rho}{16(h_c-\rho)} = 0$.

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{h_c}{2(h_c-\rho)}\cos\beta - \frac{h_c-2\rho}{4(h_c-\rho)} = 0$.

67. ρ_c, h_c. 1. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\beta^4 - \frac{5h_c+6\rho_c}{4(h_c+\rho_c)}\cos\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{5h_c+8\rho_c}{16(h_c+\rho_c)} = 0$.

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{h_c+2\rho_c}{2(h_c+\rho_c)}\cos\beta - \frac{h_c}{4(h_c+\rho_c)} = 0$.

§ 19.

Auflösung der kubischen Gleichungen nebst Aufgaben.

Es sei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die gegebene kubische Gleichung; dieselbe ist zunächst in eine andere zu verwandeln, in welcher das zweite Glied fehlt; dies geschieht mittelst der Substitution $x = y - \frac{1}{3}a$ und man erhält so die reduzierte kubische Gleichung: $y^3 + py - q = 0$. Wir setzen nun $y = u + v$, wo eine der beiden neuen Unbekannten eine ganz unabhängige Veränderliche ist. Wir erhalten $(u+v)^3 + p(u+v) - q = 0$ oder $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) - q = 0$. Die eine der Unbekannten u oder v nehmen wir nun so an, daß $3uv + p = 0$; dann ist $u^3 + v^3 = q$ und $uv = -\frac{p}{3}$ oder $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Hosted by Google

Man kann nun u^3 und v^3 als Wurzeln einer quadratischen Gleichung ansehen und findet $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ und $v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; mithin $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (Cardanische Formel). Die beiden anderen Wurzeln der Gleichung findet man auf folgende Weise: Durch Subtraktion der beiden Gleichungen $y^3 + py - q = 0$ und $(u + v)^3 + p(u + v) - q = 0$ erhält man: $y^3 - (u + v)^3 + p(y - (u + v)) = 0$ oder $(y - (u + v))\{y^2 + y(u + v) + (u + v)^2 + p\} = 0$. Nun ist entweder $y - (u + v) = 0$, welcher Wert bereits in der Cardanischen Formel gefunden, oder es ist $y^2 + y(u + v) + (u + v)^2 + p = 0$, also $y = -\frac{u + v}{2} \pm \sqrt{-\frac{3(u + v)^2}{4} - p} = \frac{1}{2}\{-(u + v) \pm \sqrt{-3(u + v)^2 + 12uv}\} = -\frac{u + v}{2} \pm \frac{u - v}{2} i\sqrt{3}$. Die Cardanische Formel wird nur dann zu benutzen sein, wenn die Größe unter dem Quadratwurzelzeichen positiv ist. Da unter der Voraussetzung, daß p und q reelle Größen sind, $\frac{q^2}{4}$ stets positiv ist, so hängt dies hauptsächlich von der Größe und dem Vorzeichen von p ab.

1. $p > 0$; die Gleichung hat also die Form $y^3 + py - q = 0$. Sind p und q irrationale Zahlen, so empfiehlt sich mehr die trigonometrische Auflösung. Nach der Cardanischen Formel ist $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} =$
$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$; hierin $\frac{4p^3}{27q^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$ (1, a), also $\frac{q}{2} = \cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ gesetzt, giebt
$y = \sqrt[3]{\cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2})} + \sqrt[3]{\cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}(1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2})}$
$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\cot\varphi\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)} + \sqrt[3]{\cot\varphi\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right)}\right\} =$

Hosted by Google

$\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot\frac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}\right)$, und nun $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$ (1, b) gesetzt, giebt $y = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\cot\psi - \operatorname{tg}\psi) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\psi$ (1, c).

2. $p < 0$ und $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$, so daß die Cardanische Formel noch anzuwenden ist. Die Gleichung hat die Form $y^3 - py - q = 0$. Es ist

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right]} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right]};$$

hierin $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin\varphi^2$ (2, a) gesetzt, also $\frac{q}{2} = \sqrt{\frac{p^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\varphi}$, giebt

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\varphi}\,(1+\sqrt{1-\sin\varphi^2})} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\varphi}\,(1-\sqrt{1-\sin\varphi^2})}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}\right);\ \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi \text{ (2, b) gesetzt,}$$

giebt $y = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\psi + \cot\psi) = \frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}$ (2, c).

3. Irreduktibler Fall, wenn $p < 0$ und $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; die Gleichung hat drei reelle Wurzeln und die Form: $y^3 - py - q = 0$; in diesem Fall ist die Cardanische Formel nicht anwendbar. Wenn in der Formel $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$, $\frac{\alpha}{3}$ für α gesetzt wird, so erhält man: $\cos\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha = 0$; die Gleichung mit r^3 multipliziert, giebt $(r\cos\frac{1}{3}\alpha)^3 - \frac{3}{4}r^2\,(r\cos\frac{1}{3}\alpha) - \frac{1}{4}r^3\cos\alpha = 0$ (G). Diese Gleichung wird mit der gegebenen identisch, also $y = r\cos\frac{1}{3}\alpha$ sein, wenn $p = \frac{3}{4}r^2$ und $q = \frac{1}{4}r^3\cos\alpha$ ist; mithin $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ (3, a) und $\cos\alpha = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$ (3, b). Der Gleichung (G) genügen aber auch die Werte $-r\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$ und $-r\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$, denn es ist $(-r\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha))^3 - \frac{3}{4}r^2\,(-r\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)) - \frac{1}{4}r^3\cos\alpha = 0$ und $(-r\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha))^3 - \frac{3}{4}r^2\,(-r\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha)) - \frac{1}{4}r^3\cos\alpha = 0$. Für y erhält man also folgende drei Werte: $y_1 = r\cos\frac{1}{3}\alpha$; $y_2 = -r\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$; $y_3 = -r\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$, wo r und α aus (3, a) und (3, b) zu berechnen sind.

Die Auflösungsmethode der hierher gehörenden Aufgaben ist ebenso wie die der entsprechenden Aufgaben, welche nicht auf kubische Gleichungen

Hosted by Google

führen; daher bei den verschiedenen Gruppen auf die Paragraphen verwiesen ist, in denen der Weg zur Auflösung angegeben. Diejenigen Aufgaben, welche auf reduzierte kubische Gleichungen führen, sind besonders hervorgehoben.

a) Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck; 1 und 2 liefern reduzierte kubische Gleichungen.

1. $c + b$, $\triangle$. Aufl. $a^3 - (c + b)^2\, a + 4\,(c + b)\,\triangle = 0$.
2. $c - b$, $\triangle$. Aufl. $a^3 - (c - b)^2\, a - 4\,(c - b)\,\triangle = 0$.
3. $c + b$, h. Aufl. $a^3 + ha^2 - (c + b)^2\, a + h\,(c + b)^2 = 0$.
4. $c - b$, h. Aufl. $a^3 - ha^2 - (c - b)^2\, a - h\,(c - b)^2 = 0$.

b) Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck; 5 bis 20 führen auf reduzierte kubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind § 13 angegeben.

5. $a + h_c$, $c - h_a$. Aufl. $\cot \frac{1}{4}\gamma^3 + \cot \frac{1}{4}\gamma - \frac{4\,(a + h_c)}{c - h_a} = 0$.
6. $a - h_c$, $c + h_a$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma^3 + \operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma - \frac{4\,(a - h_c)}{c + h_a} = 0$.
7. $a + h_c$, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma^3 - \operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma + \frac{2\,\triangle}{(a + h_c)^2} = 0$.
8. $a - h_c$, $\triangle$. Aufl. $\cot \frac{1}{4}\gamma^3 - \cot \frac{1}{4}\gamma - \frac{2\,\triangle}{(a + h_c)^2} = 0$.
9. ρ, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{2\,\rho^2}{\triangle} = 0$.
10. $2a + c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{4\,\rho}{2a + c} = 0$
11. $2a - c$, ρ_c. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{4\,\rho_c}{2a - c} = 0$.
12. $2a + c$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \frac{4\,(h_c - \rho)}{2a + c} = 0$.
13. $2a - c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{4\,(h_c + \rho_c)}{2a - c} = 0$.
14. ρ_c, $\triangle$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{2\,\rho_c^2}{\triangle} = 0$.
15. $\rho_c + \rho$, $\triangle$. Aufl. $\cot \alpha^3 + \cot \alpha - \frac{(\rho_c + \rho)^2}{4\,\triangle} = 0$.
16. q, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha^3 + \operatorname{tg} \alpha - \frac{4\,\triangle}{q^2} = 0$.
17. w_a, u. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}\alpha - \frac{w_a}{8\,u} = 0$.
18. r, h_a. Aufl. $\sin \gamma^3 - \sin \gamma + \frac{h_a}{4\,r} = 0$.

Hosted by Google

19. r, p. Aufl. $\cos\gamma^3 - \frac{1}{4}\cos\gamma - \frac{p}{4r} = 0.$

20. r, q. Aufl. $\sin\alpha^3 - \sin\alpha + \frac{q}{4r} = 0.$

21. q, u. Aufl. $\frac{1}{\cos\alpha^3} - \frac{2u}{q}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{4u}{q} = 0.$

22. h_a, $a + h_c$. Aufl. $\cot\frac{1}{4}\gamma^3 - \frac{2(a+h_c)}{h_a}\cot\frac{1}{4}\gamma^2 + \cot\frac{1}{4}\gamma + \frac{2(a+h_c)}{h_a} = 0.$

23. h_a, $a - h_c$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma^3 + \frac{2(a-h_c)}{h_a}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma - \frac{2(a-h_c)}{h_a} = 0.$

24. c, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{2(h_c-\rho)}{c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha - \frac{2(h_c-\rho)}{c} = 0.$

25. c, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2(h_c+\rho_c)}{c}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 + \cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{2(h_c+\rho_c)}{c} = 0.$

26. a, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\rho}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{\rho}{a} = 0.$

27. a, ρ_c. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\rho_c}{a}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha - \frac{\rho_c}{a} = 0.$

28. a, w_a. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{w_a}{2a}\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\alpha + \frac{w_a}{8a} = 0.$

29. h_c, w_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{h_c}{w_a}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{2}\alpha + \frac{h_c}{2w_a} = 0.$

30. $a + c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\rho}{a+c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\rho}{a+c} = 0.$

31. $a - c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{3\rho}{a-c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{\rho}{a-c} = 0.$

32. $a + c$, ρ_c. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3\rho_c}{a+c}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{\rho_c}{a+c} = 0.$

Hosted by Google

33. $a - c$, ρ_c. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\rho_c}{a-c} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{3\rho_c}{a-c} = 0$.

34. $a + c$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{h_c - \rho}{a+c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \frac{3(h_c - \rho)}{a+c} = 0$.

35. $a - c$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3(h_c - \rho)}{a-c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{h_c - \rho}{a-c} = 0$.

36. $a + c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3(h_c + \rho_c)}{a+c} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{h_c + \rho_c}{a+c} = 0$.

37. $a - c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{h_c + \rho_c}{a-c} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{3(h_c + \rho_c)}{a-c} = 0$.

38. $h_c - h_a$, v. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha^3 - \frac{2(h_c - h_a)}{v} \operatorname{tg} \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2(h_c - h_a)}{v} = 0$.

39. $a + h_c$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{4}\gamma^3 - \frac{2(a + h_c)}{\rho_c + \rho} \cot \frac{1}{4}\gamma^2 - \cot \frac{1}{4}\gamma - \frac{2(a + h_c)}{\rho_c + \rho} = 0$.

40. $a - h_c$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma^3 + \frac{2(a - h_c)}{\rho_c + \rho} \operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{4}\gamma + \frac{2(a - h_c)}{\rho_c + \rho} = 0$.

41. $2a + c$, w_a. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2a + c}{2 w_a} \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}\alpha + \frac{2a + c}{4 w_a} = 0$.

42. ρ, w_a. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\rho}{w_a} \sin \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4} \sin \frac{1}{2}\alpha + \frac{\rho}{w_a} = 0$.

43. q, ρ. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{q}{2\rho} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{q}{2\rho} = 0$.

44. q, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{q}{2\rho_c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{q}{2\rho_c} = 0$.

Hosted by Google

45. v, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{2\rho}{v}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - 3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{2\rho}{v} = 0$.

46. $\rho_c + \rho$, w_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{w_a}{\rho_c+\rho}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\,w_a}{4(\rho_c+\rho)} = 0$.

47. $\rho_c + \rho$, p. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{2\,p}{\rho_c+\rho}\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - \cot\frac{1}{2}\gamma - \frac{2\,p}{\rho_c+\rho} = 0$.

48. $\rho_c - \rho$, p. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{p}{\rho_c-\rho}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\gamma - \frac{p}{\rho_c-\rho} = 0$.

49. $\rho_c + \rho$, $p - q$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^3 - \frac{2(p-q)}{\rho_c+\rho}\operatorname{tg}\alpha^2 - 3\operatorname{tg}\alpha - \frac{2(p-q)}{\rho_c+\rho} = 0$.

50. $\rho_c - \rho$, $p - q$. Aufl. $\sin\alpha^3 + \frac{p-q}{2(\rho_c-\rho)}\sin\alpha^2 - \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{p-q}{2(\rho_c-\rho)} = 0$.

51. $h_c - \rho$, u. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{h_c-\rho}{u}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - 3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{h_c-\rho}{u} = 0$.

52. $h_c + \rho_c$, u. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{h_c+\rho_c}{3\,u}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}\cot\frac{1}{2}\alpha - \frac{h_c+\rho_c}{3\,u} = 0$.

53. $h_c - \rho$, v. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2(h_c-\rho)}{v}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - 3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{2(h_c-\rho)}{v} = 0$.

54. $h_c + \rho_c$, v. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2(h_c+\rho_c)}{3\,v}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}\cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{2(h_c+\rho_c)}{3\,v} = 0$.

55. $h_c - \rho$, $u - v$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3(h_c-\rho)}{u-v}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - 3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{h_c-\rho}{u-v} = 0$.

56. $h_c + \rho_c$, $u - v$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{u-v}{3(h_c+\rho_c)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{u-v}{h_c+\rho_c} = 0$.

Hosted by Google

57. w_a, u — v. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{w^a}{2\,(u-v)} \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\alpha - \frac{3\,w_a}{8\,(u-v)} = 0.$

58. p, u. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{p-u}{4\,u} = 0.$

59. p, v. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{p-v}{2\,v} \sin \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} = 0.$

60. p, u — v. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{p+u-v}{2\,(u-v)} \sin \frac{1}{2}\gamma + \frac{p-(u-v)}{4\,(u-v)} = 0.$

61. q, u — v. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 + \frac{q}{2\,(u-v)} \cos \alpha - \frac{q}{4\,(u-v)} = 0.$

62. p — q, u. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{u-(p-q)}{8\,u} = 0.$

63. p — q, v. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \frac{v-(p-q)}{4\,v} \cos \alpha - \frac{1}{8} = 0.$

64. r, $h_c + h_a$. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \cos \alpha - \left(\frac{1}{2} - \frac{h_c + h_a}{4\,r}\right) = 0.$

65. r, $h_c - h_a$. Aufl. $\cos \alpha^3 - \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \cos \alpha - \left(\frac{h_c - h_a}{4\,r} - \frac{1}{2}\right) = 0.$

66. $h_c + h_a$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cos \alpha^3 + \frac{1}{2} \cos \alpha^2 + \left(\frac{h_c + h_a}{\rho_c + \rho} - 1\right) \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0.$

67. $h_c - h_a$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\cos \alpha^3 - \frac{1}{2} \cos \alpha^2 - \left(\frac{h_c - h_a}{\rho_c + \rho} + 1\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} = 0.$

68. $h_c + h_a$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos \alpha^3 + \left(\frac{h_c + h_a}{\rho_c - \rho} + \frac{1}{2}\right) \cos \alpha^2 - \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0.$

69. $h_c - h_a$, $\rho_c - \rho$. Aufl. $\cos \alpha^3 - \left(\frac{h_c - h_a}{\rho_c - \rho} + \frac{1}{2}\right) \cos \alpha^2 - \cos \alpha + \frac{1}{2} = 0.$

Hosted by Google

70. $c + h_c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2\rho}{c+h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{2\rho}{c+h_c} - 1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{2\rho}{c+h_c} = 0.$

71. $c - h_c$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2\rho}{c-h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \left(\frac{2\rho}{c-h_c} + 1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{2\rho}{c-h_c} = 0.$

72. $c + h_c$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \left(\frac{c+h_c}{2\rho_c} + 1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{c+h_c}{2\rho_c} = 0.$

73. $c - h_c$, ρ_c. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \left(\frac{c-h_c}{2\rho_c} - 1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{c-h_c}{2\rho_c} = 0.$

74. $c + h_c$, $h_c - \rho$. Aufl.. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{2(h_c-\rho)}{c+h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 + \left(1 - \frac{2(h_c-\rho)}{c+h_c}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{2(h_c-\rho)}{c+h_c} = 0.$

75. $c - h_c$, $h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{2(h_c-\rho)}{c-h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 + \left(1 + \frac{2(h_c-\rho)}{c-h_c}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{2(h_c-\rho)}{c-h_c} = 0.$

76. $c + h_c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \left(1 - \frac{c+h_c}{2(h_c+\rho_c)}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{c+h_c}{2(h_c+\rho_c)} = 0.$

77. $c - h_c$, $h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \left(1 + \frac{c-h_c}{2(h_c+\rho_c)}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{c-h_c}{2(h_c+\rho_c)} = 0.$

c) Aufgaben über das allgemeine Dreieck; 78 bis 81 führen auf reduzierte kubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind § 14 angegeben.

78. r, $h_b + h_a$, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{h_b+h_a}{8r\cos\frac{1}{2}\delta} = 0.$

79. r, $h_b - h_a$, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 - \cos\frac{1}{2}\gamma + \frac{h_b-h_a}{8r\sin\frac{1}{2}\delta} = 0.$

80. $h_b + h_a$, $p - q$, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{h_b+h_a}{2(p-q)}\sin\frac{1}{2}\delta = 0.$

Hosted by Google

81. $h_b - h_a$, $p - q$, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 - \cos\frac{1}{2}\gamma + \frac{h_b - h_a}{2(p-q)}\cos\frac{1}{2}\delta = 0$.

82. r, h_c, $u - v$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^3 + \frac{u-v}{2h_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{2r - h_c}{h_c}$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta + \frac{u-v}{2h_c} = 0$.

83. h_c, $h_b + h_a$, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{h_b + h_a}{4h_c\cos\frac{1}{2}\delta}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma$ $+ \frac{h_b + h_a}{4h_c}\cos\frac{1}{2}\delta = 0$.

84. h_c, $h_b - h_a$, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{h_b - h_a}{4h_c\sin\frac{1}{2}\delta}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \cos\frac{1}{2}\gamma$ $- \frac{h_b - h_a}{4h_c}\sin\frac{1}{2}\delta = 0$.

85. $h_b + h_a$, w_c, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{h_b + h_a}{4w_c\cos\frac{1}{2}\delta^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma$ $+ \frac{h_b + h_a}{4w_c} = 0$.

86. $h_b - h_a$, w_c, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{h_b - h_a}{4w_c\sin\delta}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \cos\frac{1}{2}\gamma$ $- \frac{h_b - h_a}{4w_c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = 0$.

87. $p - q$, w_c, γ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta^3 - \frac{p-q}{2w_c}\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\delta +$ $\frac{p-q}{2w_c}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 0$.

88. s, ab, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 + \cos\frac{1}{2}\delta\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{s^2 + ab}{ab}$ $\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{s^2 - ab}{ab}\cos\frac{1}{2}\delta = 0$.

89. $s - c$, ab, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \cos\frac{1}{2}\delta\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{ab + (s-c)^2}{ab}$ $\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{ab - (s-c)^2}{ab}\cos\frac{1}{2}\delta = 0$.

90. $s - a$, ab, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 - \sin\frac{1}{2}\delta\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{ab - (s-a)^2}{ab}$ $\cos\frac{1}{2}\gamma + \frac{ab + (s-a)^2}{ab}\sin\frac{1}{2}\delta = 0$.

91. $h_b + h_a$, ab, δ. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^6 - \cos\frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{(h_b + h_a)^2}{16\,ab\,\cos\frac{1}{2}\delta^2}$ $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_b + h_a)^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2}{16\,ab} = 0$.

Hosted by Google

92. $s - c$, $a^2 + b^2 - c^2$, δ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{\{a^2+b^2-c^2-4(s-c)^2\}\cos\frac{1}{2}\delta}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{a^2+b^2-c^2+2(s-c)^2}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{\{a^2+b^2-c^2-2(s-c)^2\}\cos\frac{1}{2}\delta}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2} = 0.$

d) Aufgaben über das Dreieck, wenn Radien der Berührungskreise gegeben. 93 führt auf eine reduzierte kubische Gleichung. Die zur Auflösung führenden Wege sind § 15 angegeben.

93. $a + b$, $u - v$, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^3 + \frac{(a+b)^2 - (\rho_a+\rho_b)^2}{(a+b)^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta - \frac{(u-v)(\rho_a+\rho_b)}{(a+b)^2} = 0.$

94. a, b, ρ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{a+b}{\rho}\cot\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{ab+\rho^2}{\rho^2}\cot\frac{1}{2}\gamma - \frac{a+b}{\rho} = 0.$

95. a, b, ρ_c. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{a+b}{\rho_c}\cot\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{ab+\rho_c^2}{\rho_c^2}\cot\frac{1}{2}\gamma - \frac{a+b}{\rho_c} = 0.$

96. r, ρ, w_c. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{2\rho}{w_c}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{\rho}{2r}\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{\rho^2}{2r\,w_c} = 0.$

97. r, ρ_c, w_c. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{2\rho_c}{w_c}\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\rho_c}{2r}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{\rho_c^2}{2r\,w_c} = 0.$

98. $a + b$, r, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{2(2r+\rho)}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma - \frac{2\rho}{a+b} = 0.$

99. $a + b$, w_c, $\rho_a + \rho_b$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{(a+b)^2 + (\rho_a+\rho_b)^2}{2w_c(a+b)}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_a+\rho_b)^2}{2w_c(a+b)} = 0.$

100. w_c, $u - v$, $\rho_c + \rho$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\delta^3 + \frac{(\rho_c+\rho)^2 + (u-v)^2}{2w_c(u-v)}\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\delta - \frac{u-v}{2w_c} = 0.$

Hosted by Google

101. w_c, $p-q$, $\varrho_c+\varrho$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \frac{(\varrho_c-\varrho)\{(p-q)^2+(\varrho_c+\varrho)^2\}}{2\,w_c\,(p-q)^2}$

$\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\varrho_c+\varrho)^2}{(p-q)^2}\sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{(\varrho_c+\varrho)^3}{2\,w_c\,(p-q)^2} = 0.$

e) Aufgaben über Dreieck, wenn ein Verhältnis gegeben. 102 führt auf eine reduzierte kubische Gleichung. Die zur Auflösung führenden Wege sind § 17 angegeben.

102. $c : a+b = m:n$, h_b+h_a, w_c. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma^3 - \sin\frac{1}{2}\gamma + \frac{(n^2-m^2)\,(h_b+h_a)}{4\,n^2\,w_c} = 0.$

103. $a:b = m:n$, r, w_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta^3 - \frac{w_c}{2\,r}\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \cos\frac{1}{2}\delta + \frac{w_c\,(m+n)^2}{8\,mnr} = 0.$

104. $c : a+b = m:n$, h_b+h_a, $p-q$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma^6 - \cos\frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{n^2\,(h_b+h_a)^2}{4\,m^2\,(u-v)^2}\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(n^2-m^2)\,(h_b+h_a)^2}{4\,m^2\,(u-v)^2} = 0$

oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^3 - \frac{2\,m\,(p-q)}{n\,(h_b+h_a)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta - \frac{2\,m\,(p-q)\,(n^2-m^2)}{n^3\,(h_b+h_a)} = 0.$

f) Aufgaben über das Dreieck, wenn eine Relation zwischen den Winkeln gegeben. 105, 106, 107 führen auf reduzierte kubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind § 18 angegeben.

105. $\alpha = 4\beta$, a, b. Aufl. $\cos\beta^3 - \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{a}{8b} = 0.$

106. $\alpha = 4\beta$, h_a, h_b. Aufl. $\cos\beta^3 - \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{h_b}{8\,h_a} = 0.$

107. $\alpha = 4\beta$, u, v. Aufl. $\cos\beta^3 - \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{u}{8\,v} = 0.$

108. $\alpha = 3\beta$, h_c, $p-q$. Aufl. $\operatorname{tg}\beta^3 + \frac{2\,h_c}{p-q}\operatorname{tg}\beta^2 - 3\operatorname{tg}\beta + \frac{2\,h_c}{p-q} = 0.$

Hosted by Google

Dritter Abschnitt.

Vierecks-Aufgaben.

A. Einfache Viereckaufgaben, welche durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§ 20.

Aufgaben über den Rhombus.

Man suche △ ABD, ABC, AEB, AGD zu berechnen, wo DG ⊥ AB. Die zu berechnenden Stücke sind dann h, a, α, e, f, F, soweit sie nicht schon gegeben sind.

1. a, α	4. e, f	7. h, α	10. F, e
2. f, α	5. a, h	8. F, a	11. F, h.
3. a, f	6. e, h	9. F, α	

§ 21.

Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

Zunächst beachte man, daß $a + c = 2b$ ist. Fällt man ferner von C auf AB die Senkrechte $CG = 2\varrho$, so ist $AG = \frac{1}{2}(a + c) = b$, $GB = \frac{1}{2}(a - c)$, und mithin $F = (a + c)\varrho = 2b\varrho$. Von den in der Figur entstandenen Dreiecken sind besonders AGC und BGC ins Auge zu fassen.

1. b, α	5. e, ϱ	8. ϱ, β′	11. a − c, ϱ
2. b, ϱ	6. e, β′	9. b, a − c	12. F, b
3. ϱ, α	7. b, β′	10. a − c, α	13. F, ϱ.
4. e, b			

Es ist $\operatorname{tg}\beta' = \frac{2\varrho}{b} = \sin\alpha$, so daß von den Winkeln α und β′ durch den einen auch der andere gegeben ist. Der Radius r des Umkreises steht mit e und α durch die Gleichung $e = 2r\sin\alpha$ in Verbindung, ebenso mit b und β′ durch die Gleichung $b = 2r\sin\beta'$.

14. e, α	16. e, r	18. r, β′	19. b, r.
15. a − c, β′	17. r, α		

Hosted by Google

§ 22.

Aufgaben über das Parallelogramm.

Man fälle auf AB die Senkrechten $DF = h_a$, $CG = h_a$, $EH = \frac{1}{2} h_a$, ebenso auf AD die Höhe $BI = h_b$. Die gesuchten Stücke sind aus einem oder auch aus mehreren der entstandenen Dreiecke nacheinander zu berechnen.

1. a, b, e	11. b, α, α''	20. b, h_a, β'	29. e, ε, β'
2. a, b, α	12. b, α, α'	21. b, h_a, α''	30. a, e, ε
3. a, e, α	13. h_a, h_b, α	22. b, h_a, β''	31. a, e, β''
4. a, e, β'	14. h_a, β', α''	23. b, h_a, α'	32. e, h_a, ε
5. a, b, α'	15. a, h_a, α	24. b, h_a, e	33. a, e, h_a
6. a, α, β'	16. h_a, α, β''	25. a, b, h_a	34. e, f, h_a
7. a, e, α''	17. h_a, α, α'	26. a, e, f	35. e, h_a, β''
8. e, α, β'	18. h_a, e, α	27. e, f, ε	36. e, h_a, α''
9. b, h_b, α	19. a, h_a, h_b	28. a, β', β''	37. e, f, α'.
10. b, β', α''			

Ist unter den gegebenen Stücken der Inhalt F des Parallelogramms, so kommen die Formeln $F = ah_a = bh_b = ab \sin\alpha = \frac{1}{2} ef \sin\varepsilon = ae \sin\beta'$ und andere zur Anwendung, welche sich aus den Inhaltsformeln für die Dreiecke ABC, AEB ꝛc. ergeben.

38. F, a, b	42. F, h_a, α	45. F, a, β'	48. F, β', α''
39. F, a, α	43. F, a, e	46. F, e, β'	49. F, β', β''
40. F, e, f	44. F, h_a, e	47. F, b, h_a	50. F, h_a, h_b.
41. F, e, ε			

§ 23.

Aufgaben über das Antiparallelogramm.

Fällt man auf AB die Höhe $CF = h$, so ist $AF = \frac{1}{2}(a + c)$; $FB = \frac{1}{2}(a - c)$. Die gesuchten Stücke sind aus den durch Zeichnung von AC und CF entstandenen Dreiecken zu berechnen. Zu beachten ist, daß $F = \frac{1}{2}(a + c)\, h$.

1. a, b, e	8. a, b, α'	15. b, α, γ'
2. a, b, α	9. a, b, β'	16. e, h, α
3. b, e, α'	10. a, e, α	17. h, α, α'
4. a, e, β'	11. a, e, α'	18. a, h, α
5. a, α, β'	12. b, e, α	19. c, h, α
6. b, α, α'	13. b, e, β'	20. a + c, h, α
7. e, α, β'	14. b, a + c, α	21. h, α, β'

Hosted by Google

22. b, h, a + c
23. a, b, h
24. b, h, β'
25. b, h, γ'
26. b, e, h
27. b, h, α'
28. a − c, e, α
29. a, c, α
30. a − c, α, β'
31. a − c, α, α'
32. a − c, h, β'
33. a − c, h, γ'
34. a − c, h, α'
35. a − c, h, e
36. a, c, h
37. b, a − c, e
38. b, a − c, β'
39. b, a − c, γ'
40. b, a − c, α'
41. a, b, c
42. e, γ', β'
43. e, a + c, α
44. e, a + c, γ'
45. e, a + c, α'
46. e, a + c, b
47. e, a, c
48. a + c, α, β'
49. a + c, α', β'
50. a + c, b, β'
51. a, c, β'
52. a, h, β'
53. a + 2 b + c, h, β'
54. a + 2 b + c, e, β'
55. a + 2 b + c, e, h
56. a + 2 b + c, F, h
57. F, h, α
58. F, a + c, α
59. F, b, h
60. F, b, a + c
61. F, a, c
62. F, a, h
63. F, h, a − c
64. F, b, α
65. F, a + c, α'
66. F, a − c, α
67. F, a − c, b.

Der Radius r des Umkreises steht mit e und α durch die Gleichung $e = 2r \sin \alpha$ in Verbindung, ebenso mit a und α' durch $a = 2r \sin \alpha'$, mit b und β' durch $b = 2r \sin \beta'$, und mit c und γ' durch $c = 2r \sin \gamma'$.

68. r, α β'
69. e, r, β'
70. a, e, r
71. a, r, α
72. b, e, r
73. b, r, α
74. h, e, r
75. h, r, α
76. a − c, e, r
77. a − c, r, α
78. e, r, γ'
79. a + c, e, r
80. a + c, r, α
81. a, b, r
82. b, r, α'
83. e, r, α'
84. a, r, β'
85. b, h, r
86. h, r, β'
87. a − c, b, r
88. a − c, r, β'
89. a + c, b, r
90. a + c, r, β'
91. a − c, h, r
92. e, r, β'
93. a + c, h, r
94. a, r, β'
95. h, r, β'
96. a, c, α' (§ 14, 233)
97. a, c, r (§ 14, 233)
98. a, r, γ' (§ 14, 233)
99. F, h, r.

§ 24.

Aufgaben über das Trapez.

In den folgenden Aufgaben suche man die durch eine Diagonale und zwei Seiten gebildeten Dreiecke nacheinander zu berechnen. Ist h unter den gegebenen Stücken, so fälle man auf AB die Senkrechte CF und beachte die Dreiecke ACF und BCF. Wegen der Gleichung $F = \frac{1}{2}(a + c)\,h$ ist durch drei der Stücke a, c, h und F auch das vierte gegeben.

Hosted by Google

1. a, b, c, e
2. a, b, d, e
3. a, b, e, γ''
4. a, b, e, α
5. a, b, c, β
6. a, b, d, β
7. a, b, α, β
8. a, b, β, γ''
9. a, c, e, β'
10. a, d, e, β'
11. a, e, β', γ''
12. b, c, e, α''
13. b, d, e, α''
14. b, e, α, α''
15. b, e, α'', γ''
16. c, e, β', α''
17. d, e, β', α''
18. e, β', α'', γ''
19. a, b, c, α''
20. a, b, d, α''
21. a, b, α, α''
22. a, b, α'', γ''
23. a, b, c, β'
24. a, b, d, β'
25. a, b, β', γ''
26. a, c, e, β
27. a, d, e, β
28. a, e, α, β
29. a, e, β, γ''
30. a, c, e, α''
31. a, d, e, α''
32. a, e, α, α''
33. a, e, α'', γ''
34. b, c, e, β
35. b, d, e, β
36. b, e, α, β
37. b, e, β, γ''
38. b, c, e, β'
39. b, d, e, β'
40. b, e, β', γ''
41. a, b, e, f
42. a, b, f, β
43. a, e, f, β'
44. b, e, f, α''
45. e, f, β', α''
46. a, f, β, β'
47. a, b, f, α''
48. a, b, f, β'
49. a, e, f, β
50. a, e, f, α''
51. b, e, f, β
52. b, e, f, β'
53. a, b, β'', γ'
54. b, β', β'', γ'
55. a, b, α'', β''
56. a, b, α'', γ'
57. b, e, α'', γ'
58. a, b, e, β''
59 a, b, e, γ'
60. a, e, β', β''
61. a, e, β', γ'
62. b, e, α'', β''
63. a, β', β'', α''
64. e, β', β'', γ'
65. a, b, β', β''
66. a, b, β', γ'
67. a, e, β', γ'
68. a, e, α'', β''
69. a, e, α'', γ'
70. b, e, β'', γ'
71. b, e, β', β''
72. b, e, β', γ'
73. b, c, e, h
74. b, d, e, h
75. b, e, h, α
76. b, e, h, γ''
77. b, e, f, h
78. c, e, h, β
79. d, e, h, β
80. e, h, α, β
81. a, c, h, α
82. e, h, β, γ''
83. e, f, h, β
84. b, c, h, β'
85. b, d, h, β'
86. b, h, α, β'
87. b, f, h, β'
88. c, h, β, β'
89. d, h, β, β'
90. h, β, β', γ''
91. f, h, β, β'
92. a, b, d, h
93. a, b, c, h
94. a, b, h, α
95. a, b, h, γ''
96. a, b, f, h
97. a, c, e, h
98. a, h, β'', γ'
99. a, b, h, β''
100. a, b, h, γ'
101. a, b, c, F
102. a, b, h, F
103. a, c, e, F
104. a, e, h, F
105. a, c, F, α
106. a, c, F, β'
107. a, h, F, β
108. a, h, F, β'
109. a, h, F, α

§ 25.

Aufgaben über das Sehnenviereck.

Durch drei der sämtlichen Winkel α, β, γ, δ, ε, α', β', γ', δ' sind auch die anderen gegeben. Kennt man z. B. α, β, ε, so findet man

Hosted by Google

die übrigen vier Winkel aus den vier Gleichungen $\beta' + \gamma' = \alpha$, $\gamma' + \delta' = \beta$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ und $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$.

a) Aufgaben, in denen r gegeben ist. Aus r und einer Sehne kann man stets den zugehörigen Peripheriewinkel berechnen. Z. B. findet man aus a und r die Gleichung $\sin \alpha' = \frac{a}{2r}$. Auf diese Weise findet man die nicht schon gegebenen Winkel α', β', γ', δ', und aus diesen und r die noch fehlenden Seiten.

1. r, α', β', γ'	7. r, e, β', δ'	13. r, a, c, α	18. r, e, f, α'
2. r, a, β', γ'	8. r, e, α, ε	14. r, a, e, γ'	19. r, e, f, ε
3. r, a, β', δ'	9. r, a, b, γ'	15. r, a, e, δ'	20. r, a, b, c
4. r, a, α, ε	10. r, a, b, α	16. r, a, e, α	21. r, a, c, e
5. r, a, α, β	11. r, a, b, ε	17. r, a, e, ε	22. r, a, e, f.
6. r, e, β' γ'	12. r, a, c, β'		

b) Der Radius r ist nicht gegeben. Befindet sich unter den gegebenen Stücken eine Sehne und der zugehörige Peripheriewinkel, so kann man ähnlich wie bei a) r berechnen, wodurch die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt ist. Es genügt natürlich, den Ausdruck von r in die resultierenden Formeln einzusetzen, ohne dasselbe für sich numerisch zu berechnen.

23. a, c, β', γ'	25. a, e, f, α	27. e, f, α', β'	28. e, f, α, β'.
24. e, f, α, ε	26. a, e, f, α'		

Läßt sich aus drei der gegebenen Stücke ein von einer Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck berechnen, so kennt man von dem anderen Dreieck eine Seite (nämlich die Diagonale) und den gegenüberliegenden Winkel. Ein drittes Bestimmungsstück liefert das vierte der gegebenen Stücke unmittelbar oder mittelbar. Ist ε gegeben, so suche man noch zwei andere Winkel zu berechnen, wodurch dann alle oben angegebenen Winkel des Vierecks bekannt sind.

29. a, b, c, e	32. a, b, c, β	35. a, e, β', δ'	37. a, b, β, ε
30. a, b, e, δ'	33. a, b, γ', δ'	36. a, b, e, ε	38. a, e, β, ε.
31. a, b, e, α	34. a, b, α, β		

In den folgenden Aufgaben kann man beide Methoden anwenden.

39. a, α', β', γ'	44. a, c, α', β'	49. a, e, α' γ'	54. a, d, e, α'
40. e, α', β', γ'	45. a, d, α', β'	50. a, e, γ', δ'	55. a, c, e, β
41. a, b, α', γ'	46. a, e, β', γ'	51. a, b, c, β'	56. a, c, e, α'
42. a, b, β', γ'	47. a, e, α, β	52. a, b, c, γ'	57. a, e, γ', δ'.
43. a, b, α, β'	48. a, e, α', δ'	53. a d, e, β	

Hosted by Google

Ist außer dreien das Dreieck ABC bestimmenden Stücken f gegeben, so findet man die fehlenden Stücke aus den Dreiecken ABD und DBC. Auch kann man r berechnen und wie vorher verfahren.

58. a, f, α', β' 60. a, b, f, β 62. a, b, f, β' 64. a, e, f, β
59. e, f, α', β' 61. a, e, f, β' 63. a, e, f, α' 65. a, b, e, f.

§ 26.

Aufgaben über das Tangentenviereck.

In den folgenden Aufgaben kann man aus dreien der gegebenen Stücke ein durch eine Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck berechnen. Zur Berechnung des anderen bemerke man, daß durch drei Seiten auch die vierte gegeben ist, da $a + c = b + d$ oder $a - b = d - c$ ist.

1. a, b, c, e
2. a, b, c, β
3. a, b, c, α''
4. a, c, e, β
5. a, c, e, α''
6. a, c, e, β'
7. a, d, e, β
8. a, d, e, α''
9. a, d, e, β'
10. a, c, β, β'
11. a, d, β, β'
12. a, c, β', α''
13. a, b, c + d, e
14. a, b, c + d, β
15. e, c + d, β', α''
16. a, c + d, β', α''
17. a, c + d, e, β'
18. a, b, c + d, α''
19. a, c + d, e, β
20. a, c + d, e, α''
21. a, b, e, $c^2 - d^2$
22. a, b, β, $c^2 - d^2$
23. a, e, β', $c^2 - d^2$
24. a, $c^2 - d^2$, β', α''
25. e, $c^2 - d^2$, β', α''
26. a, b, $c^2 - d^2$, α''
27. a, e, $c^2 - d^2$, β
28. a, e, $c^2 - d^2$, α''.

§ 27.

Einfache Aufgaben über das allgemeine Viereck.

a) Man berechne mittelst der vier Hauptfälle die beiden Dreiecke ABC und ADC, in welche das Viereck durch eine Diagonale geteilt wird, einzeln.

1. e', β', α'', γ'', δ'
2. c, e, γ'', β', α''
3. c, e, α'', β', δ'
4. c, e, α'', β', δ
5. c, d, e, α'', β'
6. a, e, β', γ, γ''
7. a, c, e, β', γ''
8. a, c, e, β', δ'
9. a, c, e, β', γ
10. a, c, e, β', δ
11. a, d, e, β', γ''
12. a, d, e, β', δ'
13. a, d, e, β' δ
14. a, d, e, β', γ
15. a, e, β', γ, γ''
16. a, c, e, α'', γ''
17. a, d, e, α, α''
18. a, d, e, α'', δ'
19. a, d, e, α'', δ
20. a, c, e, α, α''
21. a, e, α, α'', δ'
22. a, b, e, α, δ'
23. a, b, e, α, γ
24. a, b, c, e, γ''
25. a, b, c, e, α
26. a, b, c, e, δ'
27. a, b, c, e, γ
28. a, b, c, e, δ
29. a, b, c, d, e
30. a, c, e, β, γ''

Hosted by Google

31. a, c, e, α, β
32. a, c, e, β, δ
33. a, c, e, β, γ
34. a, d, e, α, β
35. a, d, e, β, γ
36. a, d, e, β, δ
37. a, e, α, β, δ'
38. a, e, β, γ, γ''
39. a, e, α, β, γ.

b) Drei der gegebenen Stücke dienen zur Berechnung von $\triangle$ ABC. Mittelst des hierdurch gefundenen Wertes von e und der beiden anderen gegebenen Stücke läßt sich $\triangle$ ADC berechnen.

40. a, α'', β', γ'', δ'
41. a, c, α'', β', γ''
42. a, c, α'', β' δ'
43. a, c, α'', β', δ
44. a, d, α'', β', γ''
45. a, d, α'', β', δ'
46. a, d, α'', β', δ
47. a, c, d, α'', β'
48. a, b, β, γ'', δ'
49. a, b, α, β, δ'
50. a, b, α, β, γ
51. a, b, c, β, γ''
52. a, b, c, β, δ'
53. a, b, c, β, γ
54. a, b, c, α, β
55. a, b, c, β, δ
56. a, b, c, d, β
57. a, b, α'', γ'', δ'
58. a, b, α, α'', δ'
59. a, b, c, α'', γ''
60. a, b, c, α, α''
61. a, b, c, α'', δ'
62. a, b, c, α'', δ
63. a, b, d, α'', γ''
64. a, b, d, α, α''
65. a, b, d, α'', δ'
66. a, b, d, α'', δ
67. a, b, c, d, α''.

c) Drei der gegebenen Stücke dienen zur Berechnung von $\triangle$ ABC, unter den beiden anderen befindet sich f oder ein an f anliegender Winkel (α', δ'', β'', γ'). Nachdem man a und b, wenn sie nicht gegeben sind, aus $\triangle$ ABC berechnet hat, kann man die Dreiecke ABD und CBD nacheinander berechnen.

68. a, c, f, β', α''
69. a, c, α'', β', β''
70. a, c, α'', β', γ'
71. a, d, α'', β', γ'
72. a, f, α'', β', γ''
73. a, α'', β', γ', γ''
74. a, f, α'', β', δ'
75. a, α'', β', β'', δ'
76. a, f, α', α'', β'
77. a, f, α'', β', β''
78 a, f, α'', β', γ'
79. c, e, f, β', α''
80. c, e, α'', β', ε
81. c, e, α'', β', β''
82. e, f, α'', β', γ''
83. e, f, α', α'', β'
84. e, f, α'', β', ε
85. e, α'', β', γ', γ''
86. a, b, c, β, ε
87. a, b, f, β, γ''
88. a, b, β, α', γ''
89. a, b, γ', γ'', δ''
90. a, b, f, β, ε
91. a, c, e, f, β'
92. a, c, e, β', β''
93. a, c, e, β', γ'
94. a, c, e, β', δ''
95. a, d, e, α', β'
96. a, d, e, β', γ'
97. a, d, e, β', δ''
98. a, e, f, β', γ''
99. a, e, β', γ', γ''
100. a, e, f, β', δ'
101. a, e, f, β', γ
102. a, e, β', β'', δ'
103. a, e, β', β'', γ
104. a, e, β', γ', δ'
105. a, e, f, β', γ'
106. a, e, f, β', δ''
107. a, e, f, β', β''
108. a, e, α', β', γ'
109. a, b, c, α'', β'',
110. a, b, c, α'', γ'
111. a, b, c, α'', δ''
112. a, b, d, α', α''
113. a, b, d, α'', γ'
114. a, b, f, α'', γ''
115. a, b, f, α, α''
116. a, b, α', α'', γ''
117. a, b, α, α', α''
118. a, b, α'', γ'', δ''
119. a, b, α, α'', ε
120. a, b, f, α'', δ'
121. a, b, α'', δ', δ''
122. a, b, f, α', α''
123. a, b, f, α'', β''
124. a, b, α'', β'', δ''
125. a, c, e, f, α''
126. a, c, e, α'', β''
127. a, c, e, α'', γ'

Hosted by Google

128. a, c, e, α'', δ''
129. a, d, e, α'', γ'
130. a, e, f, α'', γ''
131. a, e, f, α'', δ'
132. a, e, f, α, α''
133. a, e, f, α', α''
134. a, e, f, α'', β''
135. a, e, f, α'', γ'
136. a, e, f, α'', δ''
137. a, e, α', α'', γ'
138. a, e, α'', γ'', δ''
139. a, e, α'', β'', δ'
140. a, e, α'', δ', δ''
141. a, e, α, α'', γ'
142. a, c, e, f, β
143. a, c, e, β, β''
144. a, c, e, γ', δ''
145. a, c, e, β, ε
146. a, d, e, β, ε
147. a, e, f, β, δ'
148. a, e, f, α, β
149. a, e, f, β, γ
150. a, e, f, β, β''
151. a, e, f, β, ε
152. a, e, α', β, γ''
153. a, e, γ', γ'', δ''
154. a, e, α, β, ε
155. a, e, β, β'', δ'
156. a, e, β, γ', δ'
157. a, e, β, γ, ε
158. a, b, c, e, f
159. a, b, c, e, β''
160. a, b, c, e, γ'
161. a, b, c, e, δ''
162. a, b, c, e, ε
163. a, b, e, f, γ''
164. a, b, e, f, α
165. a, b, e, f, α'
166. a, b, e, f, γ'
167. a, b, e, f, ε
168. a, b, e, α', γ''
169. a, b, e, α', δ''
170. a, b, e, γ', γ''
171. a, b, e, α, γ'
172. a, b, e, γ'', δ''
173. a, b, e, α, ε
174. a, b, e, α', γ'.

B. Vierecksaufgaben, welche nicht unmittelbar durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§ 28.

Aufgaben über den Rhombus.

Man drücke die gegebenen Stücke durch a und α aus und suche diese beiden Größen aus den erhaltenen Gleichungen zu bestimmen, soweit sie nicht selbst gegeben sind.

1. $e + f = s$, a. Aufl. Da $e = 2a \cos \frac{1}{2}\alpha$, $f = 2a \sin \frac{1}{2}\alpha$, so ist $s = 2a(\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha)$, mithin $\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{s}{2\sqrt{2} \cdot a}$

2. a, $e - f$ 4. $e - f$, α 5. $a + h$, α 6. $a - h$, α.

3. $e + f$, α

7. $e + h = s$, α. Aufl. $a = \frac{s}{4 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{4}(\pi - \alpha)^2}$.

8. $e - h$, α. 9. $e + a$, α. 10. $e - a$, α.

11. $e + f = s$, h. Aufl. $a^2 + ha - \frac{1}{4}s^2 = 0$.
12. $e - f = d$, h. Aufl. $a^2 - ha - \frac{1}{4}d^2 = 0$.
13. $e + a = s$, f. Aufl. $2s \sin \frac{1}{2}\alpha - 2f \cos \frac{1}{2}\alpha = f$.
14. $e - a = d$, f. Aufl. $2f \cos \frac{1}{2}\alpha - 2d \sin \frac{1}{2}\alpha = f$.

15. F, $e + f$ (§ 10) 17. F, $a + h$. 18. F, $a - h$.
16. F, $e - f$ (§ 10)

Hosted by Google

§ 29.

Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

In allen Fällen gelangt man zu einer Auflösung, indem man sämtliche Stücke durch zwei derselben, α und ρ ausdrückt. Man gelangt nämlich leicht zu den Gleichungen $a = 2\rho \cot \frac{1}{2}\alpha$, $b = \rho(\cot \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha) = \frac{2\rho}{\sin \alpha}$, $c = 2\rho \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, $a - c = 4\rho \cot \alpha$, $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c) = 2\rho \cot \alpha$, $a + b = \frac{2\rho(2 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$, $b + c = \frac{2\rho(2 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}$, $e^2 = 4\rho^2 + b^2 = \frac{4\rho^2(1 + \sin \alpha^2)}{\sin \alpha^2}$, $r^2 = \frac{e^2}{4 \sin \alpha^2} = \frac{\rho^2(1 + \sin \alpha^2)}{\sin \alpha^4}$, $F = 2b\rho = \frac{4\rho^2}{\sin \alpha}$. Sind ρ und α beide nicht gegeben, so liefern die beiden gegebenen Stücke zwei Gleichungen, aus denen man ρ und α suchen kann. Ist eine der Größen ρ und α gegeben, die andere also unbekannt, so liefert das außerdem noch gegebene Stück eine Gleichung, welche zur Bestimmung der Unbekannten dient. Zuweilen empfiehlt es sich, ein anderes Stück als ρ und α direkt zu berechnen. So ist es z. B. häufig von Vorteil, mittelst der Gleichung $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta'$ den Winkel β' statt α einzuführen. Auch die Gleichungen $4\rho^2 = ac$, $2b = a + c$ lassen sich vorteilhaft anwenden.

1. a, ρ. 2. a, α. 3. a, β'. 4. F, α. 5. F, β'.

6. a, c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{c}{a}}$, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{ac}$.

7. a, b. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{a}{2b}}$.

8. a − c, e. Aufl. $\rho = \frac{\sqrt{4e^2 - (a - c)^2}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{4e^2 - (a - c)^2}}{\sqrt{2}(a - c)}$.

9. a, e. 1. Aufl. $b^2 + 2ab - (a^2 + e^2) = 0$. 2. Aufl. $\cos \beta'^2 + \frac{2a}{e} \cos \beta' - \left(1 + \frac{a^2}{e^2}\right) = 0$.

10. F, e. 1. Aufl. $\sin \alpha^2 - \frac{e^2}{F} \sin \alpha + 1 = 0$. 2. Aufl. $\sin 2\beta' = \frac{2F}{e^2}$.

Hosted by Google

11. ρ, r. 1. Aufl. $\sin\alpha^4 - \frac{\rho^2}{r^2}\sin\alpha^2 - \frac{\rho^2}{r^2} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta'^2 + \frac{\rho}{r}\cos\beta' - 1 = 0$.

12. $a - c = d$, r. Aufl. $\sin\alpha^4 - \frac{16\,r^2 - d^2}{16\,r^2}\sin\alpha^2 + \frac{d^2}{16\,r^2} = 0$.

13. F, $a - c = d$. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{d^2}{4\,F}\sin\alpha - 1 = 0$.

14. $a + b = s$, ρ. Aufl. $s\sin\alpha - 2\rho\cos\alpha = 4\rho$ (§ 3, 1).

15. $a + b$, α.

16. $a + b = s$, e. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{4\,e^2}{s^2 + e^2}\cos\alpha - \frac{2\,s^2 - 4\,e^2}{s^2 + e^2} = 0$.

Ist α' gegeben, so führt die Bestimmung von α auf eine höhere Gleichung, die nur für den Fall $\alpha' = \frac{1}{2}\pi$ die einfache Form $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - 1 = 0$ annimmt. Die Seiten des Dreiecks ABC bilden beiläufig bemerkt, eine stetige Proportion. Gegeben ist $\alpha' = \frac{1}{2}\pi$ und außerdem:

17. ρ	19. b	21. e	23. $a - c$	25. F.
18. a	20. c	22. r	24. $a + b$	

§ 30.

Aufgaben über das Parallelogramm.

a) Die folgenden Aufgaben lassen sich unmittelbar auf Dreiecksaufgaben zurückführen, in denen die gegebenen Stücke Dreieckswinkel, Seiten, Höhen oder Inhalt, oder auch Aggregate aus solchen sind.

1. a, $e + f$, ε (§ 14, 51)	15. a, h_a, α' (§ 14, 65)
2. a, $e - f$, ε (§ 14, 53)	16. α, h_a, ε (§ 14, 65)
3. $a + b$, e, α (§ 14, 51)	17. a, h_a, $\beta'' - \beta'$ (§ 14, 66)
4. $a - b$, e, α (§ 14, 53)	18. e, f, $\beta'' - \beta'$ (§ 14, 78)
5. a, $e + f$, β' (§ 14, 70)	19. a, b, $\alpha' - \beta''$ (§ 14, 78)
6. a, $e - f$, β' (§ 14, 71)	20. a, $e + f$, $\beta'' - \beta'$ (§ 14, 52)
7. $a + b$, e, α'' (§ 14, 70)	21. a, $e - f$, $\beta'' - \beta'$ (§ 14, 54)
8. $a - b$, e, α'' (§ 14, 71)	22. f, $a + b$, $\alpha' - \beta''$ (§ 14, 52)
9. $a + b$, α'', β' (§ 14, 1)	23. f, $a - b$, $\alpha' - \beta''$ (§ 14, 54)
10. $a - b$, α'', β' (§ 14, 2)	24. $a^2 - b^2$, α', β'' (§ 14, 12)
11. $e + f$, α', α'' (§ 14, 1)	25. ab, α', β'' (§ 14, 14)
12. $e - f$, α', α'' (§ 14, 2)	26. $e^2 - f^2$, α', α'' (§ 14, 12)
13. $h_b + h_a$, α'', β' (§ 14, 5)	27. ef, α', α'' (§ 14, 14)
14. $h_b - h_a$, α'', β' (§ 14, 6)	28. F, e, α (§ 14, 68)

Hosted by Google

29. F, a, ε (§ 14, 68)
30. F, h_a, ε (§ 14, 184)
31. F, b, β′ (§ 14, 68)
32. F, h_b, β′ (§ 14, 184)
33. F, f, β′ (§ 14, 68)
34. F, a, e + f (§ 14, 454)
35. F, a, e − f (§ 14, 456)
36. F, h_a, e + f (§ 14, 487)
37. F, h_a, e − f (§ 14, 519)
38. F, e, a + b (§ 14, 454)
39. F, e, a − b (§ 14, 456).

40. F, a + b, α (§ 14, 94) oder $ab = \frac{F}{\sin \alpha}$ (§ 10).

41. F, a − b, α (§ 14, 122) oder wie 40.
42. F, e + f, ε. Wie 40.
43. F, e − f, ε. Wie 41.
44. F, $h_b + h_a$, α (§ 14, 212) oder $h_b h_a = F \sin \alpha$ (§ 10).
45. F, $h_b - h_a$, α (§ 14, 224) oder wie 44.

46. F, a + b, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b + h_a}{a + b}$ (40).

47. F, a − b, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b - h_a}{a - b}$ (41).

b) Die sechs Winkel α, ε, α′, α″, β′, β″ sind sämtlich bestimmt, wenn man zwei von ihnen kennt. Es bestehen unter ihnen die Gleichungen $\alpha' + \alpha'' = \varepsilon$ (I), $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$ (II), $\alpha'' + \beta' = \alpha$ (III), $\alpha' + \beta'' = \pi - \alpha$ (IV), $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' = \pi$ (V), von denen aber (II) und (IV) eine Folge der anderen sind, so daß wir in der That bis jetzt nur 3 Gleichungen zwischen den Winkeln haben. Eine vierte ergiebt sich, wenn man beachtet, daß nach dem Sinussatz $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \beta'}$ und $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta''}$; also $\frac{\sin \alpha''}{\sin \beta'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta''}$ (VI) ist.

Aus diesen vier Gleichungen kann man stets vier unbekannte Winkel berechnen. Es treten dabei vier verschiedene Fälle ein.

1. Gegeben sei α′ und α″. Dann ist nach (VI) und (II) $\frac{\sin \beta'}{\sin \beta''} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'}$ und $\beta' + \beta'' = \pi - (\alpha' + \alpha'')$, also β′ und β″ nach § 7, 1 zu berechnen.

2. Gegeben sei α″ und β′. Nach (VI) und (IV) ist $\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta''} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \beta'}$ und $\alpha' + \beta'' = \pi - (\alpha'' + \beta')$, also α′ und β″ zu berechnen nach § 7, 1.

3. Gegeben sei α′ und β′. Nach (VI) und (V) ist $\sin \alpha'' \sin \beta'' = \sin \alpha' \sin \beta'$ und $\alpha'' + \beta'' = \pi - (\alpha' + \beta')$, mithin α″ und β″ nach § 6, 1 zu berechnen.

Hosted by Google

4. Gegeben sei α und ε. Aus (VI) erhält man auf bekannte Weise $\frac{\sin\alpha' + \sin\alpha''}{\sin\alpha' - \sin\alpha''} = \frac{\sin\beta'' + \sin\beta'}{\sin\beta'' - \sin\beta'}$, woraus unter Berücksichtigung von (I) und (II) sich $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\cot\frac{1}{2}(\beta'' - \beta')$ ergiebt. Hieraus folgt $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2 - 1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + 1} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\cot\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') - 1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\cot\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') + 1}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\cos\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') - \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\sin\frac{1}{2}(\beta'' - \beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\cos\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') + \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')\sin\frac{1}{2}(\beta'' - \beta')}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' + \beta'' - \alpha'' - \beta')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')}{\sin\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha)}$, also schließlich, da die linke Seite gleich $-\cos\varepsilon$ ist, $\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'') = -\cos\alpha\cos\varepsilon$ (VII). Aus dieser Gleichung findet man $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')$, und da $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'' - \beta' + \beta'') = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ ist, so findet man $\alpha' - \alpha''$ und $\beta'' - \beta'$, endlich mit Zuhülfenahme von (I) und (II) α', β', α'', β''.

48. f, α'', β'
49. e + f, α'', β'
50. e − f, α'', β'
51. $e^2 - f^2$, α'', β'
52. ef, α'', β'
53. a, α', α''
54. h_a, α', α''
55. a + b, α', α''
56. a − b, α', α''
57. $h_b + h_a$, α', α''
58. $h_b - h_a$, α', α''
59. $a^2 - b^2$, α', α''
59a. ab, α', α''
60. a, α', β'
60a. h_a, α', β'
61. e, α', β'
62. a + b, α', β'
63. a − b, α', β'
64. e + f, α', β'
65. e − f, α', β'
66. $h_b + h_a$, α', β'
67. $h_b - h_a$, α', β'
68. $a^2 - b^2$, α', β'
69. ab, α', β'
70. $e^2 - f^2$, α', β'
71. ef, α', β'
72. F, α', β'
73. e, h_a, α'
74. a, α, ε
75. e, α, ε
76. h_a, α, ε.

77. a + b, α, ε. 1. Aufl. Nach der Berechnung der Winkel liefert der Tangentialsatz die Gleichung $a - b = (a + b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \beta'')\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ oder $a - b = (a + b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')\cot\frac{1}{2}\alpha$. 2. Aufl. Wendet man auf die Dreiecke ABE und ADE den Projektionssatz an und berücksichtigt, daß der Inhalt $\frac{1}{8}\,ef\sin\varepsilon$ des Dreiecks ABE gleich der Hälfte des Inhalts $\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha$ des Dreiecks ABD ist, so erhält man die Gleichungen $4a^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varepsilon$ (α), $4b^2 = e^2 + f^2 + 2ef\cos\varepsilon$ (β), $2ab\sin\alpha = ef\sin\varepsilon$ (γ), $a + b = s$ (δ). Um auf geschickte Weise a und b aus denselben zu berechnen, substituiere man $a = r\cos\varphi$ (ε), $b = r\sin\varphi$ (ζ). Durch Subtraktion von (α) und (β) erhält man, wenn man ef mittelst (γ) eliminiert und für a und b die Werte (ε) und (ζ) einsetzt, $4r^2\cos 2\varphi = -4r^2\sin 2\varphi\cot\varepsilon\sin\alpha$, mithin $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (η), woraus φ zu berechnen ist. Aus (δ) findet man

Hosted by Google

dann $r = \frac{s}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi)}$, mithin aus (ε) und (ζ) $a = \frac{s\cos\varphi}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi+\varphi)}$, $b = \frac{s\sin\varphi}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi+\varphi)}$.

78. $a - b$, α, ε. Ähnlich wie 77.

79. $e + f$, α, ε. 1. Aufl. Nach Berechnung der Winkel liefern die Gaußschen Gleichungen $a = \frac{(e+f)\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\beta''-\beta')}$, $b = \frac{(e+f)\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}$.

2. Aufl. Man benutze dieselben Gleichungen und Substitutionen wie in 77, 2. Aufl., nur daß $e + f - s$ an die Stelle von (δ) tritt. Man erhält ebenso wie oben $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (η). Durch Addition von (α) und (β) erhält man $2r^2 = e^2+f^2 = s^2-2ef$, oder wenn man (γ), (ε), (ζ) benutzt, $r = \frac{s}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{\sin 2\varphi\sin\alpha}{\sin\varepsilon}}}$.

Setzt man $\cot\mu = \sqrt{\frac{\sin 2\varphi\sin\alpha}{\sin\varepsilon}}$ (ϑ), so erhält man $r = \frac{s\sin\mu}{\sqrt{2}}$, mithin findet man nach Berechnung von φ und μ aus (η) und (ϑ) $a = \frac{s\sin\mu\cos\varphi}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{s\sin\mu\sin\varphi}{\sqrt{2}}$.

80. $e - f$, α, ε. Ähnlich wie 79.

81. $h_b + h_a$, α, ε. Aufl. $a + b = \frac{h_b + h_a}{\sin\alpha}$ (77).

82. $h_b - h_a$, α, ε. Aufl. $a - b = \frac{h_b - h_a}{\sin\alpha}$ (78).

83. F, α, ε. 1. Aufl. Nach Berechnung der Winkel zurückgeführt auf § 22, 48 oder 49. 2. Aufl. Ähnlich wie in 77, 2. Aufl., erhält man $e^2 + f^2 - 2ef\cos\varepsilon = 4a^2$ (α); $e^2 + f^2 + 2ef\cos\varepsilon = 4b^2$ (β); $ab\sin\alpha = F$ (γ); $ef\sin\varepsilon = 2F$ (δ). Setzt man $a = r\cos\varphi$ (ε), $b = r\sin\varphi$ (ζ), $c = r'\cos\psi$ (η), $f = r'\sin\psi$ (ϑ), so erhält man durch Addition von (α) und (β) $r'^2 = 2r^2$ (ι). Mit Hülfe dieser Gleichung gehen (γ) und (δ) über in $r^2\sin 2\varphi\sin\alpha = 2F$ (κ), $r^2\sin 2\psi\sin\varepsilon = 2F$ (λ), woraus $\sin 2\varphi\sin\alpha = \sin 2\psi\sin\varepsilon$ (μ) folgt. Ferner erhält man durch Subtraktion von (α) und (β) mit Berücksichtigung von (ι) $-\sin 2\psi\cos\varepsilon = \cos 2\varphi$ (ν), und durch Division von (ν) und (μ) $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (ο), woraus φ zu berechnen. Für r findet man aus (κ) $r = \sqrt{\frac{2F}{\sin 2\varphi\sin\alpha}}$,

Hosted by Google

und mit Hülfe von (ε) und (ζ) $a = \sqrt{\frac{F \cot \varphi}{\sin \alpha}}$, $b = \sqrt{\frac{F \operatorname{tg} \varphi}{\sin \alpha}}$.

Will man e und f berechnen, so geschieht es mittelst (η) und (ϑ), nachdem man vorher $\sin 2\psi$ aus (ν) berechnet hat.

84. $a^2 - b^2$, α, ε. 85. $e^2 - f^2$, α, ε.

86. $a + b$, $h_b + h_a$, ε. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b + h_a}{a + b}$ (77).

87. $a - b$, $h_b - h_a$, ε. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b - h_a}{a - b}$ (78).

c) Bei der Herleitung in b), 4 waren wir auf die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha'') \cot \frac{1}{2} (\beta'' - \beta')$ gekommen, welche ε finden lehrt, wenn $\alpha' - \alpha''$ und $\beta'' - \beta'$ gegeben sind. Da $\alpha' + \alpha'' = \varepsilon$, $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$, so findet man auch α', α'', β', β''. Auf ganz ähnliche Weise leitet man die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2 = \cot \frac{1}{2} (\alpha' - \beta'') \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha'' - \beta')$ her, welche aus $\alpha' - \beta''$ und $\alpha'' - \beta'$ zunächst α und dann die übrigen Winkel finden lehrt.

88. a, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 102. a, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
89. h_a, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 103. h_a, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
90. e, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 104. e, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
91. F, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 105. F, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
92. $a + b$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 106. $a + b$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
93. $a - b$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 107. $a - b$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
94. $e + f$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 108. $e + f$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
95. $e - f$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 109. $e - f$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
96. $h_b + h_a$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 110. $h_b + h_a$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
97. $h_b - h_a$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 111. $h_b - h_a$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
98. $a^2 - b^2$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 112. $a^2 - b^2$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
99. $e^2 - f^2$, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 113. $e^2 - f^2$, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
100. ab, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 114. ab, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$
101. ef, $\alpha' - \alpha''$, $\beta'' - \beta'$ 115. ef, $\alpha' - \beta''$, $\alpha'' - \beta'$

d) Ist einer der Winkel α oder ε gegeben, so kommen im ersteren Falle die Gleichungen $a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = e^2$ (I), $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = f^2$ (II), $ab \sin \alpha = F$ (III), im letzteren $e^2 + f^2 - 2ef \cos \varepsilon = 4a^2$ (IV), $e^2 + f^2 + 2ef \cos \varepsilon = 4b^2$ (V), $ef \sin \varepsilon = 2F$ (VI) zur Anwendung. Aus (III) und (VI) folgt auch $2ab \sin \alpha = ef \sin \varepsilon$ (VII). Der Kürze wegen wollen wir stets $a + b = s$, $a - b = d$, $e + f = s'$, $e - f = d'$ setzen. Ist s oder d und α gegeben, so drücke man in (I), (II) und (III) $a^2 + b^2$ und ab durch s und d aus; man erhält dadurch $s^2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 + d^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 = e^2$ (VIII), $s^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 + d^2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 = f^2$ (IX),

Hosted by Google

$(s^2 - d^2) \sin\alpha = 4F$ (X). Ist außerdem noch s' oder d' gegeben, so addiere und subtrahiere man (VIII) und (IX) und drücke $e^2 + f^2$ und $e^2 - f^2$ durch s' und d' aus. Dann ergiebt sich $2s^2 + 2d^2 = s'^2 + d'^2$ (XI) und $(s^2 - d^2)\cos\alpha = s'd'$ (XII). Auf ähnliche Weise leitet man für den Fall, daß ε gegeben ist, aus (IV), (V), (VI), die Gleichungen: $s'^2 \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2 + d'^2 \cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 = 4a^2$ (XIII), $s'^2 \cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 + d'^2 \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2 = 4b^2$ (XIV), $(s'^2 - d'^2)\sin\varepsilon = 8F$ (XV), $(s'^2 - d'^2)\cos\varepsilon = -4sd$ (XVI). Aus (X) und (XV) folgt noch $2(s^2 - d^2)\sin\alpha = (s'^2 - d'^2)\sin\varepsilon$ (XVII).

116. a, b, ε. Aufl. (I), (II), (V), (VII). $\sin\alpha = -\frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varepsilon}{2ab} = \frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}(\pi - \varepsilon)}{2ab}$ (74).

117. e, f, α. 1. Aufl. (I), (II), (VII). $\sin\varepsilon = \frac{(e^2 - f^2)\operatorname{tg}\alpha}{2ef}$; zurückgeführt auf 75 oder § 22, 26. 2. Aufl. Man erhält aus (VIII) und (IX) $s^2 = \frac{e^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - f^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha}$, $d^2 = \frac{f^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - e^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha}$. Setzt man, nachdem man e als Faktor ausgezogen, $\frac{f}{e} = \cot\varphi$, so findet man $s = \frac{e}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)\sin(\varphi - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos\alpha}}$, $d = \frac{e}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\cos(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)\cos(\varphi - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos\alpha}}$. 3. Aufl. Setzt man in (I) und (II) $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, so erhält man durch Addition $r^2 = \frac{e^2 + f^2}{2}$, und durch Subtraktion $\sin 2\varphi = \frac{e^2 - f^2}{2r^2\cos\alpha}$, so daß man nacheinander r, φ, a, b berechnen kann.

118. $e + f$, F, α. Aufl. (X) und (XII). $d' = \frac{4F\cot\alpha}{s'}$.

119. $e - f$, F, α. Aufl. (X), (XII). $s' = \frac{4F\cot\alpha}{d'}$.

120. $a + b$, F, ε. Aufl. (XV), (XVI). $d = \frac{2F\cot(\pi - \varepsilon)}{s}$.

121. $a - b$, F, ε. Aufl. (XV), (XVI). $s = \frac{2F\cot(\pi - \varepsilon)}{d}$.

122. $a + b$, e, ε. Aufl. Addiere und subtrahiere (IV) und (V) und eliminiere f aus den erhaltenen Gleichungen. $d = \frac{e\cos\varepsilon\sqrt{s^2 - e^2}}{\sqrt{s^2 - e^2\cos\varepsilon^2}}$.

Hosted by Google

123. a — b, e, ε. Ähnlich wie 122.

124. e + f, a, , α. Ähnlich wie 122 mit Hülfe von (I) und (II).

125. e — f, a, α. Ähnlich wie 122.

126. a + b, e + f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $d^2 - \frac{2s}{\cos\varepsilon} \cdot d - (s'^2 - s^2) = 0$. 2. Aufl. Setzt man in (IV) und (V) $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$; $e = r'\cos\psi$, $f = r'\sin\psi$, so erhält man durch Addition und Subtraktion die beiden Gleichungen $r'^2 = 2r^2$, $-r'^2 \sin 2\psi \cos\varepsilon = 2r^2\cos 2\varphi$, zu denen noch $s^2 = r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 = r^2(1 + \sin 2\varphi)$ und $s'^2 = r'^2(\cos\psi + \sin\psi)^2 = r'^2(1 + \sin 2\psi)$ hinzutreten. Durch Elimination von r, r', ψ erhält man aus den vier Gleichungen zur Bestimmung von φ die Gleichung $2s^2\cos 2\varphi + s'^2\cos\varepsilon\sin 2\varphi = (2s^2 - s'^2)\cos\varepsilon$ (§ 3, 1). Für r findet man $r = \frac{s}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$; daher $a = \frac{s\cos\varphi}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$, $b = \frac{s\sin\varphi}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$.

127. a — b, e — f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $s^2 + \frac{2d}{\cos\varepsilon} \cdot s - (d'^2 - d^2) = 0$. 2. Aufl. ähnlich wie 126, 2. Aufl.

128. a + b, e — f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $d^2 + \frac{2s}{\cos\varepsilon} \cdot d + s^2 - d'^2 = 0$. 2. Aufl. wie 126, 2. Aufl.

129. a — b, e + f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $s^2 - \frac{2d}{\cos\varepsilon} \cdot s - (s'^2 - d^2) = 0$. 2. Aufl. ähnlich wie 126, 2. Aufl.

130. a + b, e + f, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $d'^2 + \frac{2s'}{\cos\alpha} \cdot d' - (4s^2 - s'^2) = 0$, dann wie 3. 2. Aufl. Aus (I) und (II) findet man durch die Substitutionen $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $e = r'\cos\psi$, $f = r'\sin\psi$ ähnlich wie in 126, 2. Aufl., zur Bestimmung von ψ, φ, a, b die Gleichungen $2s^2\cos\alpha \cdot \sin 2\psi - s'^2\cos 2\psi = (s'^2 - 2s^2)\cos\alpha$, $\sin 2\varphi = \frac{\cos 2\psi}{\cos\alpha}$, $a = \frac{s'\cos\varphi}{2\cos(\frac{1}{4}\pi - \psi)}$, $b = \frac{s'\sin\varphi}{2\cos(\frac{1}{4}\pi - \psi)}$.

131. a — b, e — f, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $s'^2 - \frac{2d'}{\cos\alpha} \cdot s' - (4d^2 - d'^2) = 0$, dann wie 4. 2. Aufl. wie 130, 2. Aufl.

Hosted by Google

132. $a + b$, $e - f$, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $s'^2 + \frac{2\,d'}{\cos\alpha} \cdot s' - (4s^2 - d'^2) = 0$, dann wie 3. 2. Aufl. ähnlich wie 130, 2. Aufl.

133. $a - b$, $e + f$, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $d'^2 - \frac{2\,s'}{\cos\alpha} \cdot d' + s'^2 - 4\,d^2 = 0$, dann wie 4. 2. Aufl. ähnlich wie 130, 2. Aufl.

134. $e + f$, $h_b + h_a$, α. Aufl. $a + b = \frac{h_b + h_a}{\sin\alpha}$, und dadurch wie 130.

135. $e - f$, $h_b + h_a$, α (132). 136. $e + f$, $h_b - h_a$, α (133).

137. $e - f$, $h_b - h_a$, α (131).

138. $a^2 - b^2 = D^2$, $e^2 - f^2 = D'^2$, α. Aufl. Es ist $sd = D^2$ und nach (XII) $s^2 - d^2 = \frac{D'^2}{\cos\alpha}$ (§ 10).

139. $a^2 - b^2 = D^2$, $e^2 - f^2 = D'^2$, ε. Aufl. Es ist $s'd' = D'^2$ und nach (XVI) $s'^2 - d'^2 = -\frac{4\,D^2}{\cos\varepsilon}$, dann wie in 138.

e) Ist kein Winkel gegeben, so suche man zunächst α oder ε zu bestimmen. In betreff der Bezeichnungen vergleiche d).

140. a, b, $e + f$. Aufl. Aus d), (XIII), (XIV) findet man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{4\,b^2 - s^2}{4\,a - s^2}}$, dann wie 1.

141. a, b, $e - f$. Aufl. Aus d), (XIII), (XIV) findet man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{4\,a^2 - d'^2}{4\,b^2 - d'^2}}$, dann wie 2.

142. e, f, $a + b$. Aufl. d), (VIII), (IX). $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s^2 - e^2}{s^2 - f^2}}$, dann wie 3.

143. e, f, $a - b$. Aufl. d), (VIII), (IX). $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{f^2 - d^2}{e^2 - d^2}}$, dann wie 4.

144. a, b, $ef = q^2$. Aufl. Aus d), (IV), (V) findet man $\cos(\pi - \varepsilon) = \frac{a^2 - b^2}{q^2}$, aus (VII) $\sin\alpha = \frac{q^2 \sin\varepsilon}{2\,ab}$.

145. e, f, $ab = q^2$. Aufl. Aus d), (I) und (II) findet man $\cos\alpha = \frac{e^2 - f^2}{4\,q^2}$, aus (VII) $\sin\varepsilon = \frac{2\,q^2 \sin\alpha}{ef}$.

146. F, $a + b$, $e + f$. Aufl. Durch Elimination von d und d' aus d), (X), (XI), (XII) erhält man $((4\,s^2 - s'^2)\,s'^2 + 16\,F^2)\sin\alpha^2 - 8\,F\,s'^2 \sin\alpha - 16\,F^2 = 0$. Zieht man im ersten Gliede

Hosted by Google

$16\,F^2$ als Faktor aus und substituiert $\frac{s'\sqrt{4s^2 - s'^2}}{4F} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man $\sin\alpha^2 - \frac{s^2\cos\varphi^2}{2F}\cdot\sin\alpha - \cos\varphi^2 = 0$. a und b findet man aus $a + b = s$ und $ab = \frac{F}{\sin\alpha}$ (§ 10).

147. $a - b$, $e - f$, F. Aufl. Ähnlich wie in 146 findet man $((4d^2 - d'^2)\,d'^2 + 16\,F^2)\sin\alpha^2 + 8\,Fd'^2\sin\alpha - 16\,F^2 = 0$. Da $4d^2 - d'^2$ positiv und negativ sein kann, so ist eine der vorigen analoge Substitution hier allgemein nicht anwendbar. Setzt man, nachdem $16\,F^2$ im ersten Gliede als Faktor ausgezogen ist, $\frac{(4d^2 - d'^2)\,d'^2}{16\,F^2} = \cos\psi$, so erhält man $\sin\alpha^2 + \frac{d'^2}{4F\cos\frac{1}{2}\psi^2}\sin\alpha - \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\psi^2} = 0$. Endlich findet man a und b aus $a - b = d$, $ab = \frac{F}{\sin\alpha}$.

148. $a + b$, $e - f$, F. Ähnlich wie 146.

149. $a - b$, $e + f$, F. Ähnlich wie 146.

§ 31.

Aufgaben über das Antiparallelogramm.

In allen Fällen gelangt man sicher zu einer Auflösung, wenn man sämtliche Stücke durch drei derselben, etwa a, c, α ausdrückt. Man findet so $b = \frac{a - c}{2\cos\alpha}$, $h = \frac{1}{2}(a - c)\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta' = \frac{(a - c)\operatorname{tg}\alpha}{a + c}$, $\operatorname{tg}\alpha' = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta') = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta'}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta'} = -\frac{a\sin 2\alpha}{a\cos 2\alpha + c}$, $\operatorname{tg}\gamma' = \operatorname{tg}(\alpha - \beta') = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta'}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta'} = \frac{c\sin 2\alpha}{a + c\cos 2\alpha}$, $e^2 = \frac{1}{4}(a + c)^2 + h^2 = \frac{1}{4}(a + c)^2 + \frac{1}{4}(a - c)^2\operatorname{tg}\alpha^2 = \frac{(a + c)^2\cos\alpha^2 + (a - c)^2\sin\alpha^2}{4\cos\alpha^2}$, $2b + c = \frac{a - c}{\cos\alpha} + c$, $a + 2b + c = \frac{(a + c)\cos\alpha + a - c}{\cos\alpha}$, $F = \frac{1}{2}(a + c)\,h = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)\operatorname{tg}\alpha$. Die gegebenen Stücke liefern die nötige Anzahl von Gleichungen, um a, c, α, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Häufig ist es von Vorteil, $a + c$ und $a - c$ anstatt a und c in die Gleichungen einzuführen und zu bestimmen. Wenn r

Hosted by Google

gegeben ist, beachte man $a = 2r \sin \alpha'$, $b = 2r \sin \beta'$, $c = 2r \sin \gamma'$, $e = 2r \sin \alpha$.

1. $a + 2b + c = u$, h, α. Aufl. $a - c = 2h \cot \alpha$, $a + c = u - \frac{2h}{\sin \alpha}$.
2. $a + 2b + c = u$, $a - c = d$, α. Aufl. $a + c = u - \frac{d}{\cos \alpha}$.
3. $a + 2b + c = u$, $a - c = d$, β'. Aufl. $u \cos \alpha - d \cot \beta' \sin \alpha = d$ (§ 3, 1).
4. $a + 2b + c = u$, h, $a - c = d$. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2d}$, $a + c = u - \frac{d}{\cos \alpha}$.
5. a, $2b + c = s$, β'. Aufl. $(s - a) \sin \alpha + (s + a) \operatorname{tg} \beta' \cos \alpha = 2a \operatorname{tg} \beta'$ (§ 3, 1).
6. a, $2b + c = s$, α. Aufl. $a - c = \frac{(s - a) \cos \alpha}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}$.
7. a, $2b + c = s$, h. Aufl. $(s - a) \sin \alpha + 2h \cos \alpha = 2h$ (§ 3, 1).
8. F, a, α. Aufl. $c = \sqrt{a^2 - 4F \cot \alpha}$.
9. F, a, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F \cot \beta'}$.
10. F, α, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F \cot \beta'}$, $a - c = 2 \cot \alpha \sqrt{F \operatorname{tg} \beta'}$.
11. F, b, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F \cot \beta'}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{F \operatorname{tg} \beta'}}{b}$.
12. F, r, β' (11).
13. F, b, r (11).
14. F, $a - c$, β'. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{F \operatorname{tg} \beta'}}{a - c}$.
15. F, $a + 2b + c = u$, α. Aufl. Man erhält die Gleichungen $(a + c) \cos \alpha + a - c = u \cos \alpha$, $4F = (a + c)(a - c) \operatorname{tg} \alpha$. Die letztere läßt sich leicht auf die Form $(a + c) \cos \alpha \cdot (a - c) = 4F \cot \alpha \cos \alpha$ bringen, und dann ist $(a + c) \cos \alpha$ und $a - c$ nach § 10 zu berechnen.
16. $a + 2b + c = u$, e, α. Aufl. $2e \sin \beta' + 2e \sin \alpha \cos \beta' = u \sin \alpha$ (§ 3, 1).
17. $a + 2b + c = u$, e, r (16).
18. $a + 2b + c = u$, r, α (16).

Aus F und einem Stücke des Dreiecks AEC (CE ist eine Höhe) findet man alle übrigen Stücke desselben. Ist z. B. F und e gegeben, so ist zunächst $2F = (a + c) h$, und da $a + c = 2e \cos \beta'$, $h = e \sin \beta'$, so findet man $\sin 2\beta' = \frac{2F}{e^2}$.

Hosted by Google

19. F, e, α (10)
20. F, e, r (10)
21. F, e, b (11)
22. F, e, a (9)
23. F, e, a — c (14)
24. F, e, a + 2 b + c
25. F, a + 2 b + c, β'
26. F, r, α (10)
27. F, r, β' (11)
28. F, b, r (11).

In den folgenden Aufgaben dienen die gegebenen Stücke zur Berechnung von $\triangle$ ABC oder ACD. Die fehlenden Stücke findet man wie in § 23.

29. a, h, α' (§ 14, 65).
30. a, h, γ' (§ 14, 66).
31. a, h, r (§ 14, 65).
32. r, h, α' (§ 14, 65).

§ 32.

Aufgaben über das Sehnentangentenviereck.

Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt F.

a) Sämtliche Stücke lassen sich, und zwar meistenteils einfach, durch ρ, α, β ausdrücken. Man findet leicht $a = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}$, $b = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha) = \frac{\rho\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}$, $c = \rho\,(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}$, $d = \rho\,(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\alpha) = \frac{\rho\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}$, $e^2 = \frac{4\rho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha^2}$, $f^2 = \frac{4\rho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\beta^2}$, $r^2 = \frac{e^2}{4\sin\beta^2} = \frac{\rho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha^2\sin\beta^2}$, $a + c = b + d = \frac{2\rho(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $a - c = \frac{2\rho\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $b - d = \frac{2\rho\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $a + b = \frac{2\rho(1+\sin\alpha\cot\frac{1}{2}\beta)}{\sin\alpha}$, $a - b = d - c = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha) = 2\rho\cot\alpha$, $a - d = b - c = 2\rho\cot\beta$, $F = (a+c)\rho = \frac{2\rho^2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\sin\varepsilon = \frac{2F}{ef} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$. Auch der später in c), 3 entwickelte Ausdruck $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, aus welchem der für $\sin\varepsilon$ sich ableiten läßt, kann zur Anwendung kommen. Die gegebenen Stücke liefern die nötige Anzahl von Gleichungen, um ρ, α, β, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Die übrigen zu suchenden Stücke kann man dann aus den vorstehenden Gleichungen berechnen. Ist r gegeben, so beachte man die Gleichungen $e = 2r\sin\beta$, $f = 2r\sin\alpha$, $a = 2r\sin\alpha'$ u. s. w.

Hosted by Google

Sind e und f gegeben, so kann man auch mit Vorteil die Gleichungen $ef = \frac{4\rho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\frac{e}{f} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ anwenden.

1. ρ, α, β.

2. a, α, β. Aufl. $b = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, $c = a\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\beta$.

3. a, ρ, α. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\rho} - \cot\frac{1}{2}\alpha$.

4. e, ρ, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{e^2\sin\alpha^2 - 4\rho^2}{4\rho^2\sin\alpha}$.

5. f, ρ, α. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{4\rho^2\sin\alpha}{f^2}\sin\beta - \frac{4\rho^2}{f^2} = 0$.

6. ρ, r, α (5). 7. f, r, ρ (5).

8. a, b, α. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta = \left(\frac{(a+b)\cos\alpha}{a-b} - 1\right)\frac{1}{\sin\alpha}$.

9. a, c, α. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha}{c}$.

10. a, b, ρ. Aufl. $\cot\alpha = \frac{a-b}{2\rho}$, $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a+b}{2\rho} - \frac{1}{\sin\alpha}$.

11. a, c, ρ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{(a-c)\rho}{ac}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(a+c)\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{ac} = \frac{(a+c)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a-c}$.

12. e, f, ρ. Aufl. $\sin\alpha^2 = \frac{4\rho^2 f}{e(ef-4\rho^2)}$.

13. a, b, c. Aufl. Es ist $d = a + c - b$, ferner $\frac{a}{c} = \cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$, $\frac{b}{d} = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$; daher $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$, $\cot\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, $\rho = \frac{a}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$, $F = (a+c)\rho = \sqrt{abcd}$.

14. a – b, ρ, β. Aufl. $\cot\alpha = \frac{a-b}{2\rho}$.

15. a – b, e, ρ (4) 17. a – b, r, ρ (6) 19. a – b, e, α (4).
16. a – b, f, ρ (5) 18. a – b, α, β (1)

20. a – b = g, f, α. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{g^2\,\mathrm{tg}\,\alpha^2\sin\alpha}{f^2}\sin\beta - \frac{g^2\,\mathrm{tg}\,\alpha^2}{f^2} = 0$.

21. a – b = g, r, α. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{g^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4r^2\cos\alpha}\sin\beta - \frac{g^2}{4r^2\cos\alpha^2} = 0$.

Hosted by Google

22. $a - b = g$, e, f. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{f\,(e^2 - g^2)}{(f+e)\,g^2}}$.

23. a — b, f, r (20). 24. a + c, α, β [Vergl. c)].

25. a + c, ρ, α.

26. $a + c = s$, e, f. Aufl. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{e\,(e+f+s)\,(e+f-s)}{s^2 f}}$.

27. a — c, α, β [Vergl. c)].

28. $a - c = g$, ρ, α. Aufl. $\cot\beta = \frac{g}{2\rho}\cot\alpha$.

29. $a - b = g$, $b - c = g'$, α. Aufl. $\rho = \frac{1}{2} g \operatorname{tg}\alpha$, $\cot\beta = \frac{g'\cot\alpha}{g}$.

30. a — b, b — c, β (29). 31. a — b, b — c, ρ.

32. F, α, β [Vergl. c)].

33. F, ρ, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{2\rho^2 \sin\alpha}{F\sin\alpha - 2\rho^2}$.

34. F, a, α. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 - \left(\frac{F}{a^2}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta - \frac{F\cot\frac{1}{2}\alpha}{a^2} = 0$. 2. Aufl. $(a^2\sin\frac{1}{2}\alpha + F\cos\frac{1}{2}\alpha)\cos\beta - \cot\frac{1}{2}\alpha\,(a^2\sin\frac{1}{2}\alpha - F\cos\frac{1}{2}\alpha)\sin\beta = a^2\sin\frac{1}{2}\alpha - F\cos\frac{1}{2}\alpha$, woraus durch die Substitution $\frac{F}{a^2} = \operatorname{tg}\varphi$ die Gleichung $\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)\cos\beta - \cot\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)\sin\beta = \sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)$ hervorgeht.

35. F, a, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{a\,(F - a\rho)}{\rho\,(2a\rho - F)}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{F\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a\,(F - a\rho)}$. Die Substitution $\frac{a\rho}{F} = \cos\varphi^2$ liefert $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{a\sin\varphi^2}{\rho\cos 2\varphi}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a\sin\varphi^2}$.

36. F, a, b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{F}{ab}$.

37. F, a, c. Aufl. $\rho = \frac{F}{a+c}$ (11).

38. F, a + c, α. Aufl. $\rho = \frac{F}{a+c}$ (25).

39. F, $a - c = g$, ρ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{g}{4\rho}\left(\frac{F^2}{g^2\rho^2} - 1\right)$.

40. F, e, f. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{f\,(e+f)}{2F}\sin\alpha + \frac{f}{e} = 0$.

Hosted by Google

41. F, e, r. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{er - F}{2r^2}\sin\alpha - \frac{F}{er} = 0$.

42. F, e, β (41). 43. F, r, β (41).

44. F, e, α. Aufl. $\sin\beta^2 + \frac{2F - e^2\sin\alpha}{2F\sin\alpha}\sin\beta - \frac{e^2\sin\alpha}{2F} = 0$.

45. $a + c$, r, ρ. Aufl. Aus $\sin\alpha^2 \sin\beta^2 - \frac{\rho^2}{r^2}\sin\alpha\sin\beta - \frac{\rho^2}{r^2} = 0$ berechnet man $\sin\alpha\sin\beta$; hierzu tritt noch $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{(a+c)\sin\alpha\sin\beta}{2\rho}$ (§ 10).

46. F, r, ρ (45). 47. F, r, $a + c$ (45).

48. r, ρ, $a - c$. Aufl. ähnlich wie 45.

49. a, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\frac{1}{2}\sigma + \frac{2\rho}{a}\sin\frac{1}{2}\sigma$ (§ 3, 2).

50. a, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $a\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a\cos\frac{1}{2}\tau$ (§ 3, 1).

51. a, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{(a+c)\cos\frac{1}{2}\sigma}{a - c}$.

52. a, c, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{(a-c)\cos\frac{1}{2}\tau}{a + c}$.

53. $a + c = s$, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4\rho}{s}\sin\frac{1}{2}\sigma\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

54. $a + c$, ρ, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 53.

55. $a - c = g$, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\sigma + \frac{4\rho}{g}\sin\sigma$ (§ 3, 2).

56. $a - c = g$, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g\cos(\alpha + \beta) + 4\rho\sin(\alpha + \beta) = g\cos\tau$ (§ 3, 1).

57. $a - b = g$, $a - d = g'$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\frac{\cot\alpha}{\cot\beta} = \frac{g}{g'}$ (§ 6, 9).

58. a — b, a — d, $\alpha - \beta$ (wie 57, § 6, 10).

59. F, ρ, $\alpha + \beta$ (wie 53). 62. F, $a + c$, $\alpha - \beta$ (wie 54).

60. F, ρ, $\alpha - \beta$ (wie 54). 63. r, ρ, $\alpha + \beta$ (wie 45).

61. F, $a + c$, $\alpha + \beta$ (wie 53). 64. r, ρ, $\alpha - \beta$ (wie 45).

65. r, ρ, ε. Aufl. ähnlich wie 45.

66. $a^2 - c^2 = g^2$, α, β. Aufl. $\rho^2 = \frac{g^2\sin\alpha^2\sin\beta^2}{4\sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)}$.

b) Läßt sich aus den gegebenen Stücken ein durch zwei Seiten und eine Diagonale gebildetes Dreieck, etwa ABC, berechnen, so kennt man

Hosted by Google

von dem anderen, nämlich ACD, die Stücke $AC = e$, $AD - DC = a - b$, $\angle ADC = \pi - \beta$; daher ist dasselbe zu berechnen nach § 14, 53.

67. a, b, β
68. a, e, β′
69. a, b, e
70. a, α′, β′
71. e, α′, β′
72. a, b, α′
73. a, e, β
74. a + b, e, β (§ 14, 51)
75. a − b, e, β (§ 14, 53)
76. a + b, e, α′ (§ 14, 70)
77. a − b, e, α′ (§ 14, 71)
78. a, b, r
79. a, e, r
80. a, r, β
81. e, r, β′
82. a, r, β′
83. r, α′, β′
84. a + b, e, r (§ 14, 310)
85. a − b, e, r (§ 14, 311)
86. a + b, r, β (§ 14, 20)
87. a − b, r, β (§ 14, 24)
88 a, b, α′ − β′ (§ 14, 78)
89. e, r, α′ − β′
90. e, a + b, α′ − β′ (§ 14, 52)
91. e, a − b, α′ − β′ (§ 14, 54)
92. r, a + b, α′ − β′ (§ 14, 23)
93. r, a − b, α′ − β′ (§ 14, 26)
94. a + b, α′, β′ (§ 14, 1)
95. a − b, α′, β′ (§ 14, 2).

c) Die sieben Winkel $\alpha, \beta, \varepsilon, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sind sämtlich bestimmt, wenn man zwei von ihnen kennt. Es bestehen nämlich unter denselben die sieben Gleichungen $\beta' + \gamma' = \alpha$ (I), $\gamma' + \delta' = \beta$ (II), $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (III), $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$ (IV), $\alpha' + \delta' = \pi - \alpha$ (V), $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (VI), $\beta' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (VII), von denen aber die drei letzten eine Folge der anderen sind, so daß wir in der That nur vier Gleichungen zwischen den Winkeln haben. Eine fünfte ergiebt sich, wenn man in die Gleichung $a + c = b + d$ die Ausdrücke $a = 2r \sin \alpha'$, $b = 2r \sin \beta'$, $c = 2r \sin \gamma'$, $d = 2r \sin \delta'$ einführt. Man erhält dann $\sin \alpha' + \sin \gamma' = \sin \beta' + \sin \delta'$ (VIII).

1. Gegeben sei γ' und δ'. Dann ist nach (VIII) und (IV) $\sin \alpha' - \sin \beta' = \sin \delta' - \sin \gamma'$ und $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$, daher α' und β' zu berechnen nach § 4, 3.

2. Gegeben sei α' und γ'. Nach (VIII) und (IV) ist $\sin \beta' + \sin \delta' = \sin \alpha' + \sin \gamma'$ und $\beta' + \delta' = \pi - \alpha' - \gamma'$; daher β' und δ' zu berechnen nach § 4, 1.

3. Gegeben sei α und β. Aus (VIII) folgt $\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta') \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, und da nach (I) und (VI) $\alpha' - \gamma' = \pi - \alpha - \beta$, und nach (I) und (II) $\beta' - \delta' = \alpha - \beta$ ist, so erhält man mit Benutzung von (III) und (VII) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$.

Hosted by Google

4. Gegeben sei α und ε. Aus (VIII) folgt $\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \beta') \cos \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma') \cos \frac{1}{2}(\delta' + \gamma')$, und da nach (III) und (I) $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ und nach (VII) und (I) $\delta' - \gamma' = \pi - \varepsilon - \alpha$ ist, so erhält man mit Benutzung von (II) und (VI) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}$.

Sind so sämtliche Winkel berechnet, so sind die Aufgaben dieser Unterabteilung entweder auf die vorigen zurückgeführt, oder man kann r finden und aus diesem und den Peripheriewinkeln die Seiten oder endlich ρ aus den Winkeln und dem gegebenen Stücke.

96. a, γ', δ'
97. f, γ', δ'
98. ρ, γ', δ'
99. $a + b$, γ', δ'
100. $a - b$, γ', δ'
101. $a + c$, γ', δ'
102. $a - c$, γ', δ'
103. F, γ', δ'
104. $a^2 - c^2$, γ', δ'
105. a, α', γ'
106. b, α', γ'
107. e, α' γ'
108. r, α', γ'
109. ρ, α', γ'
110. $a + b$, α', γ'
111. $a - b$, α', γ'
112. $a + c$, α', γ'
113. $a - c$, α', γ'
114. $a^2 - c^2$, α', γ'
115. F, α', γ'
116. e, α, β
117. r, α, β
118. $a + b$, α, β
119. $a - b$, α, β
120. a, α, ε
121. b, α, ε
122. e, α, ε
123. f, α, ε
124. ρ, α, ε
125. r, α, ε
126. $a + b$, α, ε
127. $a - b$, α, ε
128. $a + c$, α, ε
129. $a - c$, α, ε
130. F, α, ε
131. $a^2 - c^2$, α, ε.

Ist $e + f$ gegeben, so findet man, da $e = 2r \sin \beta$, $f = 2r \sin \alpha$, leicht $r = \frac{e + f}{2(\sin \alpha + \sin \beta)}$, $a = 2r \sin \alpha' = \frac{(e + f) \sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \beta}$ u. s. w. Ähnlich verhält es sich, wenn $f - e$ gegeben ist.

132. $e + f$, α, β
133. $f - e$, α, β
134. $e + f$, γ', δ'
135. $f - e$, γ', δ'
136. $e + f$, α', γ'
137. $f - e$, α', γ'
138. $e + f$, α, ε
139. $f - e$, α, ε.

d) Die folgenden Aufgaben lassen sich mit Beachtung von § 25, a) und b) leicht auf den vorigen Fall zurückführen. Bei einigen ist zu berücksichtigen, daß $a - b = 2\rho \cot \alpha$, ferner daß $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$.

140. a, r, γ'
141. a, r, ε
142. a, r, $\alpha + \beta$
143. a, r, α
144. e, r, α'
145. e, r, ε
146. e, r, $\alpha' - \beta'$
147. e, r, $\alpha' - \gamma'$
148. e, r, α (117)
149. e, f, α (116)
150. a, c, α' (105)
151. $a - b$, ρ, α' (98)
152. $a - b$, ρ, β' (98)
153. $a - b$, ρ, ε (124)
154. $a - b, \rho, \alpha' - \gamma'$ (119)
155. $a - b, \rho, \beta' - \gamma'$ (98).

Hosted by Google

156. $a + c = s$, r, ε. Aufl. $\sin \alpha' + \sin \gamma' = \frac{s}{2r}$, und $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§ 4, 1).

157. $a - c$, r, ε. Aufl. ähnlich wie 156.

158. $e + f$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.

159. $f - e$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.

160. $e + f$, r, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.

161. $f - e$, r, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.

162. a, c, ε. Aufl. $\frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§ 7, 1).

163. e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{f}{e}$ (§ 7, 1).

164. e, f, $\alpha - \beta$. Aufl. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{f}{e}$ (§ 7, 2).

165. e, f, ε. Aufl. $\sin \alpha^2 - \frac{e + f}{e \sin \varepsilon} \sin \alpha + \frac{f}{e} = 0$.

166. a, b, ε. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon}{b}$.

167. a, b, $\delta' - \gamma'$. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{a}{b}$, $\alpha + \varepsilon = \pi - (\delta' - \gamma')$, also § 6, 11.

168. $e + f$, F, ε. Aufl. $ef = \frac{2F}{\sin \varepsilon}$ (§ 10, 165).

169. $f - e$, F, ε (168).

170. $f^2 - e^2 = g^2$, α, β. Aufl. $g^2 = 4r^2 (\sin \alpha^2 - \sin \beta^2)$; daher $r = \frac{g}{2 \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}}$.

171. $f^2 - e^2$, γ', δ' (170). 172. $f^2 - e^2$, α', γ' (170).

173. $f^2 - e^2$, α, ε (170).

e) Für die folgenden Aufgaben ist es vielfach von Vorteil, sämtliche Stücke durch r, α', β', γ', δ' oder durch r, ε, $\alpha' - \gamma'$, $\beta' - \delta'$ auszudrücken. Man erhält $a = 2r \sin \alpha'$, $b = 2r \sin \beta'$, $c = 2r \sin \gamma'$, $d = 2r \sin \delta'$, $e = 2r \sin \beta$, $f = 2r \sin \alpha$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$, $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')}$, $a + c = 4r \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma') = 4r \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (\beta' - \delta')$, $a - c = 4r \cos \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$, $b - d = 4r \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (\beta' - \delta')$, $e + f = 4r \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma') \cos \frac{1}{2} (\beta' - \delta')$, $f - e = 4r \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma') \sin \frac{1}{2} (\beta' - \delta')$, $a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 4r^2 \sin \varepsilon \sin (\alpha' - \gamma')$, $b^2 - d^2 = 4r^2 \sin \varepsilon \sin (\beta' - \delta')$, $f^2 - e^2 = 4r^2 \sin (\alpha' - \gamma') \sin (\beta' - \delta')$.

Hosted by Google

174. $a + c = s,\ r,\ \alpha + \beta = \sigma.$ Aufl. $\sin \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s}{4 r \sin \frac{1}{2}\sigma}.$

175. $a - c = g,\ r,\ \alpha + \beta = \sigma.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{g}{4 r \cos \frac{1}{2}\sigma}.$

176. $a + c = s,\ r,\ \alpha - \beta = \tau.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s}{4 r \cos \frac{1}{2}\tau}.$

177. $e + f = s,\ r,\ \varepsilon.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon}{4 r}};$
$\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \sqrt{\frac{s \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{4 r}}.$

178. $e + f = s,\ a + c = s',\ \varepsilon.$ Aufl. $\cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2} = \frac{s \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{s'},$
$\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \frac{s \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{s'}.$

179. $f - e = g,\ a - c = g',\ \varepsilon.$ Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \frac{g \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{g'}.$

180. $e + f = s,\ a - c = g,\ \varepsilon.$ Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 + \frac{s \cos \frac{1}{2}\varepsilon^2}{g \sin \frac{1}{2}\varepsilon}$
$\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') - 1 = 0.$

181. $e + f = s,\ a + c = s',\ \alpha + \beta.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s' \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{s}.$

182. $e + f = s,\ a + c = s',\ \alpha - \beta.$ Aufl. $\sin \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s' \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{s}.$

183. $e + f = s,\ a - c = g,\ \alpha + \beta.$ Aufl. $\sin \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{g}{s}$
$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\varepsilon - 1 = 0.$

184. $f - e = g,\ a - c = g',\ \alpha + \beta.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}\varepsilon^4$
$- \frac{g'^2 \left\{1 + \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2\right\}}{g^2} \cos \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{g'^2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2}{g^2} = 0.$

185. $f - e = g,\ a - c = g',\ \alpha - \beta.$ Aufl. $\cos \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{g' \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{g}.$

186. $a - c = g,\ b - d = g',\ \varepsilon.$ Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon,$
$\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{g' \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{g}$ (§ 9, 3).

187. $e + f = s,\ a + c = s',\ r.$ Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{s'^2}{2 rs}.$

188. $a^2 - c^2 = g^2,\ r,\ \varepsilon.$ Aufl. $\sin(\alpha' - \gamma') = \frac{g^2}{4 r^2 \sin \varepsilon}.$

Hosted by Google

189. $a^2 - c^2 = g^2$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{g^2}{4\, r^2 \sin(\alpha + \beta)}$.

190. $f^2 - e^2 = g^2$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g^2}{4\, r^2 \sin(\alpha + \beta)}$.

191. $f^2 - e^2 = g^2$, r, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2}{4\, r^2 \sin \tau}$.

192. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\sin(\beta' - \delta') = \frac{g^2 \sin \varepsilon}{g'^2}$.

193. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{g'^2 \sin \tau}{g^2}$.

194. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin \sigma}{g^2}$.

195. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2 \sin \tau}{g'^2}$.

196. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{g'^2 \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{g^2}$, und $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ (§ 9, 3).

197. r, ρ, $e + f = s$. Aufl. Aus ρ und r findet man, wie in 45, $\sin \alpha \sin \beta$; ferner ist $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{s}{2r}$.

198. r, ρ, $e - f$. Aufl. ähnlich wie 197.

199. $e + f$, a, c. Aufl. Aus den Ausdrücken für $e + f$, $a + c$, $a - c$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ folgen nach Elimination von r und $\frac{\beta' - \delta'}{2}$ die Gleichungen $\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{(a + c)^2}{(e + f)(a - c)}$ und $\frac{\cos \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{a + c}{e + f}$. Setzt man in der ersten Gleichung $\frac{(a + c)^2}{a - c} = p$, so geht dieselbe über in $\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{p}{s}$, so daß § 9, 3 anzuwenden ist.

200. F, r, ε. Aufl. $F = \frac{1}{2} ef \sin \varepsilon = 2 r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \varepsilon$. Führt man statt α und β die Winkel $\alpha' - \gamma'$ und $\beta' - \delta'$ ein, so erhält man $\cos(\beta' - \delta') + \cos(\alpha' - \gamma') = \frac{F}{r^2 \sin \varepsilon}$ oder $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 = 1 + \frac{F}{2 r^2 \sin \varepsilon}$ und $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$.

Hosted by Google

201. $e + f = s$, r, ε. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon}{4r}}$

$\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \sqrt{\frac{s \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{4r}}$.

202. $f - e = g$, $a - c = g'$, $b - d = g''$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{g''^2(g^2 - g'^2)}{g'^2(g^2 - g''^2)}}$.

203. $e + f = s$, $a + c = s'$, F. Aufl. Ähnlich wie bei 200 findet man $F = 2r^2 \sin\varepsilon [\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 - 1]$ und da $s^2 = 16 r^2 \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2$ ist, $\frac{F}{s^2 \sin\varepsilon} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 - 1}{8 \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2}$. Setzt man in diese Gleichung die durch Elimination von r aus den Gleichungen für $e + f$, $a + c$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ entstandenen Ausdrücke $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \frac{s \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$, $\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \frac{s \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$ ein, so erhält man durch Auflösung der resultierenden Gleichung $\sin\varepsilon = \frac{(s^2 - s'^2)\, s'^2}{2 s^2 F}$.

§ 33.

Aufgaben über das Tangententrapez.

Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt F.

a) Sämtliche Stücke lassen sich, und zwar meistensteils einfach, durch ρ, α, β ausdrücken. Man findet leicht $a = \rho(\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$, $b = \rho(\cot \frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{2\rho}{\sin\beta}$, $c = \rho(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$, $d = \rho(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\alpha) = \frac{2\rho}{\sin\alpha}$, $a + c = b + d = \frac{2\rho(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $a - c = \frac{2\rho \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $b - d = \frac{2\rho(\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $a - b = \rho(\cot \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$, $b - c = \rho(\cot \frac{1}{2}\beta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha) = \frac{\rho \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$, $F = \frac{2\rho^2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$.

Hosted by Google

Die gegebenen Stücke liefern die nötige Anzahl von Gleichungen, um ρ, α, β, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Die übrigen zu suchenden Stücke kann man dann aus den vorstehenden Gleichungen berechnen. Ist ρ nicht gegeben, so braucht man nicht ρ selbst zu berechnen, sondern kann den Ausdruck für ρ in die Gleichung für das zu suchende Stück einsetzen, oder auch von vornherein ρ eliminieren.

1. ρ, α, β.

2. a, α, β. Aufl. $b = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}\beta}$, $c = a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$, $d = \frac{a \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}\alpha}$.

3. b, α, β. Ähnlich wie 2.

4. a, ρ, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\alpha$.

5. b, ρ, α.

6. a, b, α. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}\beta = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha}{b}$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha$ (§ 6, 4).

7. a, b, β. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{a}{b \cos \frac{1}{2}\beta}$ (§ 7, 2).

8. a, c, α. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{c \cot \frac{1}{2}\alpha}{a}$.

9. b, d, α. Aufl. $\sin \beta = \frac{d \sin \alpha}{b}$.

10. a, b, ρ (7).

11. a, c, ρ. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{ac}{(a-c)\rho}$, $\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(a+c)\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{ac} = \frac{(a+c)\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a-c}$.

12. b, d, ρ.

13. a, b, c. Aufl. Zunächst ist $d = a + c - b$. Aus $\frac{b}{d} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ und $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ folgt durch Multiplikation und Division $\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos \frac{1}{2}\beta^2} = \frac{bc}{ad}$ und $\frac{\sin \frac{1}{2}\beta^2}{\cos \frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{cd}{ab}$ und hieraus $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{a(a-b)}{d(a-c)}}$, $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{c(b-c)}{d(a-c)}}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{c(b-c)}{a(a-b)}}$.

Hosted by Google

Ähnliche Ausdrücke für β. Ferner ist $\rho = \frac{\sqrt{ac\,(a-b)\,(b-c)}}{a-c}$,

$F = \frac{(a+c)\sqrt{ac\,(a-b)\,(b-c)}}{a-c}$.

14. $a-b$, α, β (1).

15. $a-b$, ρ, α. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \cot\frac{1}{2}\alpha - \frac{a-b}{\rho}$.

16. $a-b$, ρ, β. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{a-b}{\rho} + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$.

17. $a+c$, α, β. 18. $a-c$, α, β. 19. $b-d$, α, β.

20. $a+c$, ρ, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{2\rho\sin\alpha}{(a+c)\sin\alpha - 2\rho} = \frac{2\rho}{a+c-\frac{2\rho}{\sin\alpha}}$.

21. $a-c$, ρ, α. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{(a-c)\sin\alpha}{2\rho}$ (§ 7, 2).

22. $b-d$, ρ, α. 23. $a-c$, b, α.

24. $a-c$, b, β (§ 7, 2).

25. $a-c=g$, $b-d=g'$, α. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{g}{g'}$; $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\alpha$ (§ 7, 1).

26. $a-b=g$, $b-c=g'$, α.

27. $a-b=g$, $b-c=g'$, β.

28. a, ρ, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\rho}$ (§ 4, 17), oder $\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\rho\sin\frac{1}{2}\sigma}{a}$ (§ 6, 1).

29. a, ρ, $\alpha-\beta=\tau$. Aufl. (§ 4, 18) oder $2\rho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = a\cos\frac{1}{2}\tau$ (§ 3, 1).

30. a, c, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(a+c)\cos\frac{1}{2}\sigma}{a-c}$.

31. a, c, $\alpha-\beta$ (30).

32. b, d, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b}{d}$ (§ 7, 1), oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(b-d)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma}{b+d}$.

33. b, d, $\alpha-\beta$ (32).

34. a, b, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{b\sin\frac{1}{2}\sigma}{a}$ (§ 7, 3), oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma}{a}$.

Hosted by Google

35. $a - b = g$, ρ, $\alpha + \beta$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{g}{\rho}$ (§ 4, 23).

36. $a - b$, ρ, $\alpha - \beta$ (§ 4, 24 oder § 6, 4).

37. $a + c = s$, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4\rho \sin \frac{1}{2}\sigma}{s}$ $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

38. $a + c = s$, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{4\rho \cos \frac{1}{2}\tau}{s}$ $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sin \frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

39. $a - c$, ρ, $\alpha + \beta$ (§ 6, 1).

40. $a - c = g$, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g \cos(\alpha + \beta) + 4\rho \sin(\alpha + \beta) = g \cos \tau$ (§ 3, 1).

41. $b - d = g$, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{4\rho \cos \frac{1}{2}\sigma}{g}$ $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \sin \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

42. $b - d = g$, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 + \frac{4\rho \sin \frac{1}{2}\tau}{g}$ $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \cos \frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

43. $a - c$, b, $\alpha + \beta$. 44. $a - c$, $b - d$, $\alpha + \beta$.

45. $a - c$, $b - d$, $\alpha - \beta$.

46. $a - b = g$, $b - c = g'$, $\alpha + \beta$. Aufl. $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta} = \frac{g'}{g}$ (§ 6, 9).

47. $a - b$, $b - c$, $\alpha - \beta$ (§ 6, 10).

48. $a + c = s$, $a - b = g$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $2g \operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + s \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = s \sin \frac{1}{2}\sigma$ (§ 3, 1).

49. $a - c$, b, ρ (24).

50. $a - c = g$, $b - d = g'$, ρ. Aufl. Es ist $g - g' = 2(a - b) = \frac{2\rho \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$, folglich $\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2\rho}{g - g'}$, und ebenso $\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2\rho}{g + g'}$. Durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen findet man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{4\rho g}{g^2 - g'^2}$ und $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{4\rho g' \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{g^2 - g'^2} = \frac{g' \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{g}$.

51. F, α, β. 52. F, ρ, α.

53. F, a, α. Aufl. Man erhält, indem man ρ aus den Gleichungen für a und F eliminiert, $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{F}$, und wenn man auf der linken Seite die Produkte durch Summen und Differenzen zweier Sinusse ausdrückt und alles entwickelt,

Hosted by Google

$\frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + F}{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - F} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$. Durch die Substitution $\frac{F}{a^2} = \operatorname{tg}\varphi$ entsteht hieraus $\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ (§ 3, 1).

54. F, b, β. Aufl. $\sin\alpha = \frac{b^2 \sin\beta^2}{2F - b^2 \sin\beta}$.

55. F, b, α. Aufl. $\sin\beta^2 + \sin\alpha \sin\beta - \frac{2F \sin\alpha}{b^2} = 0$.

56. F, $a + c = s$, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{2F \sin\alpha}{s^2 \sin\alpha - 2F}$.

57. F, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4\rho^2 \sin\frac{1}{2}\sigma}{F} \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

58. F, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{4\rho^2 \cos\frac{1}{2}\tau}{F} \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sin\frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

59. F, a, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \left[\frac{F}{a^2}\sin\frac{1}{2}\sigma + \cos\frac{1}{2}\sigma\right] \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{F \sin\sigma}{2a^2} = 0$, wobei § 3, 1 in Anwendung kommt.

60. F, $a + c = s$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4F \sin\frac{1}{2}\sigma}{s^2} \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

61. F, $a + c = s$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{4F \cos\frac{1}{2}\tau}{s^2} \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sin\frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

62. F, a, c. Aufl. Aus den Gleichungen für F, a und c findet man $\frac{a + c}{a - c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$ und $\frac{F}{ac} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{(a + c)\,ac}{(a - c)\,F}$.

63. F, a, ρ. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho}$ (62).

64. F, $a - c$, ρ (63).

65. F, b, ρ (52).

66. F, b, d. Aufl. $\rho = \frac{F}{b + d}$, $\sin\alpha = \frac{2\rho}{d} = \frac{2F}{(b + d)\,d}$.

67. F, $b - d$, ρ. Aufl. $b + d = \frac{F}{\rho}$, $\sin\alpha = \frac{2\rho}{d}$.

68. $a^2 - c^2 = g^2, \alpha, \beta$. Aufl. $\rho = \frac{g \sin\alpha \sin\beta}{4 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}}$.

Hosted by Google

69. $b^2 - d^2 = g^2$, α, β. Aufl. $\rho = \frac{g \sin\alpha \sin\beta}{2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

70. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, α. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{g^2}{g'^2}$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \alpha$ (§ 7, 1).

71. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $\alpha + \beta$ (70).

72. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $\alpha - \beta$ (70).

b) Läßt sich aus den gegebenen Stücken ein durch eine Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck, etwa ABC, berechnen, so kennt man von den anderen, nämlich ACD, die Stücke $AC = e$, $AD - DC = a - b$, und $\angle DCA = \beta'$. Daher ist dasselbe zu berechnen nach § 14, 71.

73. a, e, β'
74. b, e, α''
75. a, b, e
76. a, b, α''
77. a, b, β'
78. a, e, β
79. a, e, α''
80. b, e, β
81. b, e, β'
82. a, β, β'
83. b, β, β'
84. e, β, β'
85. a, e, ρ
86. b, e, ρ
87. a, ρ, β'
88. b, ρ, β'
89. b, ρ, α''
90. e, ρ, β
91. e, ρ, α''
92. ρ, β, β'
93. a, ρ, α'' (§ 14, 65)
94. $a + b$, e, β (§ 14, 51)
95. $a - b$, e, β (§ 14, 53)
96. $a + b$, e, β' (§ 14, 70)
97. $a - b$, e, β' (§ 14, 71)
98. $a + b$, e, α'' (§ 14, 70)
99. $a - b$, e, α'' (§ 14, 71)
100. $a + b$, ρ, e (§ 14, 70)
101. $a - b$, ρ, e (§ 14, 71)
102. $a + b$, β, β' (§ 14, 1)
103. $a - b$, β, β' (§ 14, 2)
104. $a + b$, ρ, β' (§ 14, 99)
105. $a - b$, ρ, β' (§ 14, 129)
106. $a^2 - b^2$, β, β' (§ 14, 12)
107. $a^2 - b^2$, e, β (§ 14, 62)
108. $a^2 - b^2$, e, β' (§ 14, 74)
109. $a^2 - b^2$, e, α'' (§ 14, 74).

c) Durch zwei beliebige Winkel des Tangententrapezes sind im allgemeinen auch seine sämtlichen anderen Winkel bestimmt, doch läßt sich die Berechnung derselben nur in wenigen Fällen einfach ausführen. Es dienen hierzu folgende Relationen. Es ist $a - b = d - c$, ferner $\frac{a-b}{e} = \frac{\sin\alpha'' - \sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha'' - \sin\beta'}{\sin(\alpha''+\beta')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}$, und ebenso $\frac{d-c}{e} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'+\gamma'')}$, folglich ist $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'+\gamma'')}$ (I); ebenso findet man $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\beta'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'')} =$

Hosted by Google

$\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\beta''+\gamma')}$ (II). Durch eine leichte Transformation erhält man hieraus die Gleichungen $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha''\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma'' = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta'^2$ (III) und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma' = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta''^2$ (IV), und aus diesen Gleichungen durch eine ebenfalls einfache Transformation $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'')} = \cos\beta'$ (V) und $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma')} = \cos\beta''$ (VI). Die Gleichungen (I) und (II) kann man auch noch in der Form $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')} = \frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ (VII) und $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\beta'')}{\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ (VIII) schreiben. Da ferner $\alpha'+\gamma'' = \alpha''+\gamma' = \varepsilon$ ist, so ist $\alpha'-\gamma' = \alpha''-\gamma''$. Dividiert man also (V) durch (VI), so ergiebt sich $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')} = \frac{\cos\beta'}{\cos\beta''}$ (IX).

1. Gegeben sei α' und γ'. Man findet zunächst β'' aus (IV) oder (VI), ferner $\alpha = \pi - \alpha' - \beta''$, $\beta = \gamma' + \beta''$. Zur Berechnung der noch fehlenden Winkel kann man ein zweifaches Verfahren anwenden. Erstens findet man aus (VII) und $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta') + \frac{1}{2}(\beta'-\gamma'') = \frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'') = \frac{1}{2}(\alpha'-\gamma')$ mit Hülfe von § 7, 1 $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')$ und $\frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')$; und da $\frac{1}{2}(\alpha''+\beta') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}(\beta'+\gamma'') = \frac{1}{2}\alpha$ ist, so findet man auch α'', β', γ''. Zweitens ergiebt sich aus (V) $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')}{\cos\beta'} = \cos\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'') = \cos\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma')$, und da $\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')+\beta' = \frac{1}{2}(\alpha''+\beta')+\frac{1}{2}(\gamma''+\beta') = \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pi - \frac{1}{2}(\alpha'+\gamma') - \beta''$ ist, so findet man nach § 7, 5 $\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')$ und β', und da $\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'') = \frac{1}{2}(\alpha'-\gamma')$ ist, auch α'' und γ''. Außer α' und γ' ist gegeben:

110. a	115. a + c	119. a + d	123. $a^2 - b^2$
111. b	116. a − c	120. a − d	124. $a^2 - c^2$
112. ρ	117. a + b	121. b − d	125. $a^2 - d^2$
113. e	118. a − b	122. F	126. $b^2 - d^2$.
114. f			

2. Gegeben sei α' und β''. Aus (IV) findet man γ' und verfährt wie im vorigen Falle. Außer α' und β'' ist gegeben:

127. c	131. a + c	135. b + c	139. $a^2 - c^2$
128. b	132. a − c	136. b − d	140. $a^2 - b^2$
129. e	133. a + b	137. c + d	141. $b^2 - c^2$
130. ρ	134. a − b	138. F	142. $d^2 - c^2$.

Hosted by Google

Gegeben ist β' und β''. Aus (IX) in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') + \frac{1}{2}(\alpha'' + \gamma'') = \varepsilon$ findet man nach § 7, 5 $\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma')$ und $\frac{1}{2}(\alpha'' + \gamma'')$. Eine der Gleichungen (V) oder (VI) liefert dann $\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')$ oder $\frac{1}{2}(\alpha'' - \gamma'')$, wodurch α', α'', γ', γ'' zu finden sind. Außer β' und β'' ist gegeben:

143. a	147. a + c	150. a − b	153. $a^2 - c^2$
144. b	148. a − c	151. b − d	154. $a^2 - b^2$
145. ρ	149. a + b	152. F	155. $b^2 - d^2$.
146. e			

4. Gegeben ist α und β. 1. Aufl. Aus (VII) und (VIII) findet man in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta') + \frac{1}{2}(\beta' - \gamma'') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha' - \beta'') + \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ nach § 7, 1 die Differenzen $\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')$, $\frac{1}{2}(\beta' - \gamma'')$, $\frac{1}{2}(\alpha' - \beta'')$, $\frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')$, und da die Summen bekannt sind, auch die Winkel selbst. 2. Aufl. Da $\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \frac{1}{2}(\alpha'' - \gamma'') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ist, so gehen (V) und (VI) in $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'' + \gamma'')}{\cos\beta'} = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma')}{\cos\beta''} = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ über. Aus diesen Gleichungen erhält man in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha'' + \gamma'') + \beta' = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') + \beta'' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ nach § 7, 5 β', $\alpha' + \gamma'$, $\alpha'' + \gamma''$, und da $\alpha' - \gamma'$ und $\alpha'' - \gamma''$ bekannt ist, sämtliche Winkel. Außer α und β ist gegeben:

156. e.	157. a + b.	158. $a^2 - b^2$.

d) Da $\sin\beta' = \frac{2\rho}{e}$, $\sin\beta = \frac{2\rho}{b}$ ist, so findet man β', wenn e und ρ gegeben sind, sowie β, wenn b und ρ gegeben sind. Die folgenden Aufgaben lassen sich somit leicht auf die unter c) zurückführen.

159. e, ρ, β''	162. e, ρ, $\beta' - \beta''$	164. b, ρ, β''
160. e, ρ, γ''	163. e, f, ρ	165. b, ρ, γ'.
161. e, ρ, ε		

e) Zieht man durch C eine Parallele mit BD, welche die Verlängerung von AB in F trifft, so entsteht ein Dreieck AFC mit den Seiten AF = a + c, FC = f und CA = e und den Winkeln ε, β' und β''. Kann man aus den drei gegebenen Stücken dieses Dreieck berechnen, so kennt man die Winkel β' und β'' und die Aufgabe ist auf eine der in c), 3 enthaltenen zurückgeführt. Will man die geometrische Konstruktion vermeiden, so kann man noch folgenden Weg einschlagen. Aus $a = e\cos\beta' + b\cos\beta$ und $c = f\cos\beta'' - b\cos\beta$ folgt $a + c = e\cos\beta' + f\cos\beta''$. Hierzu kommen noch die Gleichungen $e\sin\beta' = 2\rho$, $f\sin\beta'' = 2\rho$, aus denen $e\sin\beta'$

Hosted by Google

$= f \sin \beta''$ folgt. Für die Aufgaben, in denen der Inhalt vorkommt, beachte man, daß vermöge der Gleichung $F = (a + c)\,\rho$ von den drei Größen F, $a + c$ und ρ stets eine durch die beiden anderen bestimmt ist.

166. e, f, β'
167. e, f, $a + c$
168. e, f, ε
169. e, f, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 78)
170. $a + c$, e, β'
171. $a + c$, e, β''
172. $a + c$, e, ε
173. $f + e$, β', β'' (§ 14, 1)
174. $f - e$, β', β'' (§ 14, 2)
175. $a + c$, $f + e$, ε (§ 14, 51)
176. $a + c$, $f - e$, ε (§ 14, 53)
177. $a + c$, $f + e$, β' (§ 14, 70)
178. $a + c$, $f - e$, β' (§ 14, 71)
179. $a+c$, $f+e$, $\beta'-\beta''$ (§ 14, 52)
180. $a+c$, $f-e$, $\beta'-\beta''$ (§ 14, 54)
181. $a + c$, ρ, β'
182. $a + c$, ρ, ε (§ 14, 65)
183. $a + c$, ρ, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 66)
184. $a + c$, $f + e$, ρ (§ 14, 450)
185. $a + c$, $f - e$, ρ (§ 14, 452)
186. $f^2 - e^2$, β', β'' (§ 14, 12)
187. $a + c$, $f^2 - e^2$, ε (§ 14, 62)
188. $a+c$, f^2-e^2, $\beta'-\beta''$ (§ 14, 63)
189. F, ρ, ε (182)
190. F, $a + c$, ε (182)
191. F, ρ, $\beta' - \beta''$ (183)
192. F, $a + c$, $\beta' - \beta''$ (183)
193. F, ρ, β' (181)
194. F, $a + c$, β' (181)
195. F, ρ, e (20)
196. F, $a + c$, e (20)
197. F, ρ, $f + e$ (184)
198. F. ρ, $f - e$ (185)
199. F, $a + c$, $f + e$ (184)
200. F, $a + c$, $f - e$ (185).

201. F, e, f. Aufl. $\sin \varepsilon = \dfrac{2F}{ef}$ (168).

f) Mit Hülfe des in c) Gesagten lassen sich folgende Aufgaben auf 173, 174 oder 186 zurückführen:

202. $f + e$, α', γ'
203. $f + e$, α', β''
204. $f + e$, α, β
205. $f - e$, α', γ'
206. $f - e$, α', β''
207. $f - e$, α, β
208. $f^2 - e^2$, α', γ'
209. $f^2 - e^2$, α', β''
210. $f^2 - e^2$, α, β.

g) In den folgenden Aufgaben kommt es darauf an, die Winkel β, β', ε mit α und β in Beziehung zu bringen. Beachtet man, daß $\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \beta''$, $\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ist, so geht die Gleichung c), (VI) in $\dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta''\right]}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \cos \beta''$ über, aus welcher man durch weitere Entwicklung $\operatorname{tg} \beta'' = \dfrac{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ (X) erhält. Ähnlich leitet man $\operatorname{tg} \beta' = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ (XI) her. Durch Division beider Gleichungen erhält man $\dfrac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta''} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta}$ (XII). Ferner ist

Hosted by Google

$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}(\pi - \beta' - \beta'') = -\operatorname{tg}(\beta' + \beta'') = -\frac{\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\beta''}{1 - \operatorname{tg}\beta'\operatorname{tg}\beta''}$. Durch Einsetzen der Werte für $\operatorname{tg}\beta'$ und $\operatorname{tg}\beta''$ aus (X) und (XI) entsteht hieraus $\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}$ (XIII).

211. a, c, ε. 1. Aufl. Aus (XII) und $\frac{c}{a} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{c\operatorname{tg}\beta'}{a\operatorname{tg}\beta''}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c\operatorname{tg}\beta''}{a\operatorname{tg}\beta'}}$. Setzt man diese Werte in die leicht aus (XI) folgende Gleichung $\operatorname{tg}\beta'(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta) = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ ein, so ergiebt sich $\sqrt{\operatorname{tg}\beta'\operatorname{tg}\beta''} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}$, also $\operatorname{tg}\beta'\operatorname{tg}\beta'' = \frac{4ac}{(a+c)^2}$, so daß sich β' und β'' nach § 6, 7 berechnen lassen, die Aufgabe also auf 143 zurückgeführt ist. 2. Aufl. Aus (XIII) und $\frac{a+c}{a-c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ ergiebt sich durch Division $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = -\frac{(a-c)\operatorname{tg}\varepsilon}{2(a+c)}$.

212. a, c, β'. Aufl. Wie in 211, 1. Aufl., findet man $\operatorname{tg}\beta'' = \frac{4ac\cot\beta'}{(a+c)^2}$ (143).

213. a, c, $\beta' - \beta''$. Aufl. (211, 1. Aufl., mit Benutzung von § 6, 8, dann 143).

214. $a - c = g$, $b - d = g'$, ε. Aufl. $\frac{g}{g'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$, folglich $\frac{g+g'}{g-g'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}$, mithin nach (XII) $\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta''} = \frac{g+g'}{g-g'}$, und $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$, also β' und β'' nach § 6, 9 zu finden, wodurch die Aufgabe auf 148 zurückgeführt ist.

215. $a - c = g$, $b - d = g'$, β' (214).

216. $a - c = g$, $b - d = g'$, $\beta' - \beta''$. (214), mit Benutzung von § 6, 10.

217. b, d, ε. Aufl. Aus $\frac{b+d}{b-d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ und (XII) folgt nach Elimination von $\alpha - \beta$, wenn man den Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b-d}{2(b+d)}$ einführt, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^4 + \frac{\cos(\varepsilon-\varphi)\cos(\varepsilon+\varphi)}{\cos\varepsilon^2\cos\varphi^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\varepsilon^2 = 0$.

Hosted by Google

§ 34.

Aufgaben über das Sehnenviereck.

Die Bezeichnungen bleiben wie in § 25. Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt.

Sämtliche Stücke lassen sich einfach durch r und die Winkel α', β', γ', δ' ausdrücken. Man findet $a = 2r \sin \alpha'$, $b = 2r \sin \beta'$, $c = 2r \sin \gamma'$ $d = 2r \sin \delta'$, $e = 2r \sin \beta = 2r \sin (\alpha' + \beta')$, $f = 2r \sin \alpha = 2r \sin (\alpha' + \delta')$, $a + b = 2r (\sin \alpha' + \sin \beta')$, $a - b = 2r (\sin \alpha' - \sin \beta')$, $a + c = 2r (\sin \alpha' + \sin \gamma')$, $a - c = 2r (\sin \alpha' - \sin \gamma')$, $f + e = 2r (\sin \alpha + \sin \beta) = 4r \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, $f - e = 2r (\sin \alpha - \sin \beta) = 4r \sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') \sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, $a^2 - b^2 = 4r^2 (\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2)$, $a^2 - c^2 = 4r^2(\sin \alpha'^2 - \sin \gamma'^2)$, $f^2 - e^2 = 4r^2 (\sin \alpha^2 - \sin \beta^2) = 4r^2 \sin (\alpha' - \gamma') \sin (\beta' - \delta')$, $F = \frac{1}{2} ef \sin \varepsilon = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \varepsilon = 2r^2 \sin (\alpha' + \delta') \sin (\alpha' + \beta') \sin (\alpha' + \gamma')$. Da zur Berechnung eines Sehnenvierecks stets vier Stücke gegeben sein müssen, so erhält man mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$ stets die erforderliche Anzahl von Gleichungen, um die Stücke r, α', β', γ', δ', soweit sie noch nicht gegeben sind, zu berechnen. Die Winkel, sowie die fehlenden Seiten ergeben sich dann unmittelbar aus den vorstehenden Gleichungen oder die Aufgaben werden zurückgeführt auf § 25, 1 und 41. Oft empfiehlt es sich, sämtliche Stücke durch r, α, β, ε auszudrücken und diese Elemente, soweit sie nicht schon gegeben sind, zu berechnen. Man erhält auf diese Weise $\alpha' = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta + \varepsilon)$, $\beta' = \frac{1}{2}(\pi + \alpha - \beta - \varepsilon)$, $\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \varepsilon - \pi)$, $\delta' = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta - \varepsilon)$, $a + b = 4r \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)$, $a - b = 4r \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)$, $c + d = 4r \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)$, $c - d = -4r \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) = 4r \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}(2\pi - \varepsilon - \alpha)$, $a + c = 4r \sin \frac{1}{2}\varepsilon \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $a - c = 4r \cos \frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b + d = 4r \cos \frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $b - d = 4r \sin \frac{1}{2}\varepsilon \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $f + e = 2r (\sin \alpha + \sin \beta) = 4r \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $f - e = 2r (\sin \alpha - \sin \beta) = 4r \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $a^2 - b^2 = 4r^2 \sin \beta \sin (\varepsilon - \alpha)$, $c^2 - d^2 = -4r^2 \sin \beta \sin (\varepsilon + \alpha) = 4r^2 \sin \beta \sin (\varepsilon + \alpha - \pi)$, $a^2 - c^2 = 4r^2 \sin \varepsilon \sin (\alpha + \beta)$, $b^2 - d^2 = 4r^2 \sin \varepsilon \sin (\alpha - \beta)$, $f^2 - e^2 = 4r^2 \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$, $a + b + c + d = 4r \left(\sin \frac{1}{2}\varepsilon \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos \frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right) = 4r \left(\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \beta) + \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \beta)\right) = 4r \left(\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) + \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)\right)$, $a + b + c - d = 8r \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\varepsilon$; $-a + b + c + d = 8r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\varepsilon$, $F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \varepsilon$. Selbstverständlich braucht man in jedem

Hosted by Google

der beiden soeben angegebenen Verfahren, wenn r unbekannt ist, dasselbe nicht zu berechnen, sondern man kann es entweder gleich anfangs eliminieren, oder den für dasselbe entwickelten Wert einsetzen. Vielfach kann man auch die aus den sechs ersten Gleichungen folgenden Proportionen $a:b:c:d:e:f = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' : \sin\delta' : \sin\beta : \sin\alpha$ mit Vorteil benutzen.

a) In den folgenden Aufgaben kann man neben dem eben angegebenen allgemeinen Verfahren auch zum Ziele gelangen, indem man aus dreien der gegebenen Stücke ein von zwei Seiten und einer Diagonale gebildetes Dreieck berechnet und im übrigen so verfährt wie in § 25, b). Das allgemeine Verfahren gestattet gewöhnlich eine einfachere Rechnung.

1. a, b, β, $c + d = s$. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§ 7, 1), $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s\sin\alpha'}{a}$ (§ 4, 1).
2. a, b, β, $c - d$ (1).
3. r, α', β', $c + d = s$. Aufl. $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r}$, $\gamma' + \delta$, $= \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 4, 1).
4. r, α', β', $c - d$ (3).
5. a, e, $c + d = s$, β'. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta} = \frac{a}{e}$, $\alpha' + \beta = \pi - \beta'$ (§ 7, 1) $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s\sin\alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§ 4, 1).
6. a, e, $c - d$, β' (5).
7. $a + b = s$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{s}{4\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \beta')}$.
8. $a - b$, α', β', γ' (7).
9. $a + b = s$, c, α', β'. Aufl. wie 7, dann $\sin\gamma' = \frac{c}{2r}$.
10. $a - b$, c, α', β' (9).
11. $a + b = s$, f, α', β' (7), dann $\sin\alpha = \frac{f}{2r}$.
12. $a - b$, f, α' β' (11).
13. $a + b = s$, r, α, β. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§ 4, 1).
14. $a - b$, r, α, β (13).
15. $a + b$, r, β, ε (13).
16. $a - b$, r, β, ε (13).
17. $a + b = s$, e, α', δ'. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \beta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' + \beta')} = \frac{s}{e}$ (§ 7, 5).

Hosted by Google

18. $a - b$, e, α', δ' (17). 19. $a + b = s$, e, α', γ' (17).
20. $a - b$, e, α', γ' (17).
21. $a + b = s$, c, e, α' (17), dann $\sin \gamma' = \frac{c \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.
22. $a - b$, c, e, α' (21). 23. $a + b$, d, e, α' (21).
24. $a - b$, d, e, α' (21).
25. $a + b$, e, f, α' (17), dann $\sin \alpha = \frac{f \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.
26. $a - b$, e, f, α' (25).
27. $a + b = s$, c, d, e. Aufl. Nach Berechnung von γ' und δ' findet man $r = \frac{e}{2 \sin(\gamma' + \delta')}$, $\sin \alpha' + \sin \beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§ 4, 1).
28. $a - b$, c, d, e (27).
29. $a + b$, $c + d$, α', β' (7), zurückzuführen auf (3).
30. $a - b$, $c + d$, α', β' (29).
31. $a + b$, $c - d$, α', β' (29), auf (4) zurückzuführen.
32. $a - b$, $c - d$, α', β' (31).
33. $a + b = s$, $c + d = s'$, r, β. Aufl. $\sin \alpha' + \sin \beta' = \frac{s}{2r}$ $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$, $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s'}{2r}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§ 4, 1).
34. $a + b$, $c - d$, r, β (33). 35. $a - b$, $c - d$, r, β (33).
36. $a + b = s$, $c + d = s'$, e, α'. Aufl. wie 17, dann $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s'}{2r} = \frac{s' \sin \alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 4, 1).
37. $a - b$, $c + d$, e, α' (36). 38. $a + b$, $c - d$, e, α' (36).
39. $a - b$, $c - d$, e, α' (36).
40. a, b, $\alpha' - \beta'$, γ'. Aufl. $\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{a}{b}$ (§ 7, 2).
41. a, b, α, ε. Aufl. $\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{a}{b}$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§ 7, 2).
42. a, b, c, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40; dann $\sin \gamma' = \frac{c \sin \alpha'}{a}$.
43. a, b, f, $\alpha' - \beta'$ (42).
44. a, b, $c + d = s$, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40; $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s \sin \alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 4, 1).
45. a, b, $c - d$, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 44.
46. $a + b = s$, e, $\alpha' - \beta' = \tau$, γ'. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{e \cos \frac{1}{2} \tau}{s}$.

Hosted by Google

47. $a - b$, e, $\alpha' - \beta'$, γ' (46).

48. $a + b = s$, e, ε, α. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\beta = \frac{e \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}{s}$.

49. $a - b = s$, e, ε, α (48).

50. $a + b = s$, c, e, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \gamma' = \frac{c \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.

51. $a - b$, c, e, $\alpha' - \beta'$ (50).

52. $a + b = s$, e, f, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \alpha = \frac{f \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.

53. $a - b$, e, f, $\alpha' - \beta'$ (52).

54. $a + b = s$, $c + d = s'$, e, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s' \sin(\alpha' + \beta')}{e}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 4, 1).

55. $a + b$, $c - d$, e, $\alpha' - \beta'$ (54). 56. $a - b$, $c + d$, e, $\alpha' - \beta'$ (54).

57. $a - b$, $c - d$, e, $\alpha' - \beta'$ (54).

58. $a + b = s$, r, $\alpha' - \beta' = \tau$, γ'. Aufl. $\sin \alpha + \sin \beta' = \frac{s}{2r}$ (§ 4, 2).

59. $a - b$, r, $\alpha' - \beta'$, γ' (58), (§ 4, 4).

60. $a + b = s$, r, α, ε. Aufl. $\sin \alpha' + \sin \beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§ 4, 2).

61. $a - b$, r, α, ε (60).

62. $a + b = s$, $c + d = s'$, r, $\alpha' - \beta' = \tau$ (58; 3).

63. $a + b$, $c - d$, r, $\alpha' - \beta'$ (62). 64. $a - b$, $c + d$, r, $\alpha' - \beta'$ (62).

65. $a - b$, $c - d$, r, $\alpha' - \beta'$ (62).

66. a, b, β, $c^2 - d^2 = g^2$. Aufl. wie (1), dann $\sin \gamma'^2 - \sin \delta'^2 = \frac{g^2}{4r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 5, 3).

67. a, e, β', $c^2 - d^2$ (5; 66). 68. a, b, e, $c^2 - d^2$ (66).

69. $a^2 - b^2 = g^2$, r, γ' δ'. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§ 5, 3).

70. $a + b$, α', β', $c^2 - d^2$ (7; 66). 74. $a - b$, e, $c^2 - d^2$, $\alpha' - \beta'$ (73).

71. $a - b$, α' β', $c^2 - d^2$ (70). 75. $a + b$, $c^2 - d^2$, r, $\alpha' - \beta'$ (58; 66).

72. a, b, $c^2 - d^2$, $\alpha' - \beta'$ (40; 66). 76. $a - b$, $c^2 - d^2$, r, $\alpha' - \beta'$ (75).

73. $a + b$, e, $c^2 - d^2$, $\alpha' - \beta'$ (46; 66).

77. $a^2 - b^2 = g^2$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{g}{2\sqrt{\sin(\alpha' + \beta') \sin(\alpha' - \beta')}}$.

Hosted by Google

78. $a^2 - b^2 = g^2$, c, α', β' (77). 80. $a^2 - b^2$, c + d, α', β' (77; 3).
79. $a^2 - b^2 = g^2$, f, α', β' (77). 81. $a^2 - b^2$, c − d, α', β' (80).

82. $a^2 - b^2 = g^2$, r, α, β. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§ 5, 3).

83. $a^2 - b^2 = g^2$, r, β, ε (82).
84. $a^2 - b^2 = g^2$, c + d = s, r, β, (82; 3).
85. $a^2 - b^2 = g^2$, c − d = s, r, β, (84).

86. $a^2 - b^2 = g^2$, e, α', γ'. Aufl. $\frac{\sin(\alpha' - \beta')}{\sin(\alpha' + \beta')} = \frac{g^2}{e^2}$ (§ 7, 1).

87. $a^2 - b^2$, e, α', δ' (86). 89. $a^2 - b^2$, e, f, α' (86).
88. $a^2 - b^2$, c, e, α' (86). 90. $a^2 - b^2$, d, e, α' (88).

91. $a^2 - b^2 = g^2$, c + d = s, e, α' (86; 3).
92. $a^2 - b^2$, c − d, e, α' (91)

93. $a^2 - b^2 = g^2$, r, $\alpha' - \beta'$, γ'. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$ (§ 5, 4).

94. $a^2 - b^2 = g^2$, r, ε, α. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§ 5, 4).

95. $a^2 - b^2 = g^2$, c + d = s, r, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 93, dann $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s}{2 r}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$.

96. $a^2 - b^2$, c − d, r, $\alpha' - \beta'$ (95).

97. $a^2 - b^2 = g^2$, e, $\alpha' - \beta' = \tau$, γ'. Aufl. $\sin(\alpha' + \beta') = \frac{e^2 \sin \tau}{g^2}$.

98. $a^2 - b^2 = g^2$, e, ε, α. Aufl. $\sin(\alpha' + \beta') = \frac{e^2 \sin(\varepsilon - \alpha)}{g^2}$ und $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$.

99. $a^2 - b^2 = g^2$, c, e, $\alpha' - \beta' = \tau$ (97).
100. $a^2 - b^2 = g^2$, e, f, $\alpha' - \beta' = \tau$ (97).

101. $a^2 - b^2 = g^2$, c + d = s, e, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 97, dann $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s \sin(\alpha' + \beta')}{e}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 4, 1).

102. $a^2 - b^2$, c − d, e, $\alpha' - \beta'$ (101).

103. a + b, e, α', $c^2 - d^2 = g^2$. Aufl. wie 17, dann $\sin \gamma'^2 - \sin \delta'^2 = \frac{g^2 \sin(\alpha' + \beta')^2}{e^2}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 5, 3).

104. a − b, e, α', $c^2 - d^2$ (103).

105. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, α', β'. Aufl. wie in 77; auf 69 zurückzuführen.

Hosted by Google

106. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, r, β. Aufl. wie 82, dann $\sin\gamma'^2 - \sin\delta'^2 = \frac{g'^2}{4r^2}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§ 5, 3).

107. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, e, α'. Aufl. wie 86, dann $\sin\gamma'^2 - \sin\delta'^2 = \frac{g'^2 \sin(\alpha'+\beta')^2}{e^2}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§ 5, 3).

108. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, r, $\alpha' - \beta' = \tau$ (93; 69).

109. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, e, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 97, $r = \frac{e}{2\sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 69.

110. F, r, α', β'. Aufl. $\sin\alpha \sin\varepsilon = \frac{F}{2r^2 \sin(\alpha' + \beta')}$, $\varepsilon - \alpha = \alpha' - \beta'$ (§ 6, 2).

111. F, a, b, β (1; 110).

112. F, a, e, β'. Aufl. r und β zu bestimmen wie 5, dann wie 110.

113. F, a, b, e. Aufl. nach der Berechnung von r, α', β' wie 110.

114. F, a + b, α', β' (7; 110). 116. F, a + b, r, β (13; 110).

115. F, a − b, α', β' (8; 110). 117. F, a − b, r, β (14; 110).

118. F, a + b, e, α'. Aufl. wie 17; dann $r = \frac{e}{2\sin(\alpha' + \beta')}$, zuletzt wie 110.

119. F, a − b, e, α' (118).

120. F, a, b, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40, dann $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, und zuletzt wie 110.

121. F, a+b, r, $\alpha' - \beta'$ (58; 110). 122. F, a − b, r, $\alpha' - \beta'$ (59; 110).

123. F, a + b, e, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 46, $r = \frac{e}{2\sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

124. F, a − b, e, $\alpha' - \beta'$ (123). 125. F, $a^2 - b^2$, α', β' (77; 110).

126. F, $a^2 - b^2$, r, β (82; 110).

127. F, $a^2 - b^2$, e, α'. Aufl. wie 86; $r = \frac{e}{2\sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

128. F, $a^2 - b^2$, r, $\alpha' - \beta'$ (93; 110).

129. F, $a^2 - b^2$, e, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 97; $r = \frac{e}{\sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

b) Wegen der Gleichung $a = 2r \sin\alpha'$ läßt sich aus zweien der Stücke a, r, α' auch das dritte berechnen. Etwas Ähnliches findet auch für die anderen Seiten statt, ebenso auch für die Diagonalen, da z. B.

Hosted by Google

$e = 2\,r \sin\beta$ ist. Die folgenden Aufgaben lassen sich dadurch leicht auf die vorhergehenden zurückführen, wie auch durch die jedesmal hinzugefügte Nummer angedeutet ist.

130. $c + d$, a, α', β' (3)
131. $c - d$, a, α', β' (4)
132. a, b, $c + d$, α' (3)
133. a, b, $c - d$, α' (4)
134. a, e, $c + d$, α' (3)
135. a, e, $c - d$, α' (4)
136. a, b, r, $c + d$ (3)
137. a, b, r, $c - d$ (4)
138. $a + b$, e, γ', δ' (7, 3)
139. $a - b$, e, γ', δ' (8, 4)
140. $a + b$, e, α, β (13)
141. $a - b$, e, α, β (14)
142. $a + b$, f, α, β (13)
143. $a - b$, f, α, β (14)
144. $a + b$, e, β, ε (15)
145. $a - b$, e, β, ε (16)
146. $a + b$, c, r, β (3)
147. $a - b$, c, r, β (4)
148. $a + b$, f, r, β (13)
149. $a - b$, f, r, β (14)
150. $a + b$, e, r, γ' (3)
151. $a - b$, e, r, γ' (4)
152. $a + b$, e, r, α (13)
153. $a - b$, e, r, α (14)
154. $a + b$, e, r, ε (15)
155. $a - b$, e, r, ε (16)
156. $a + b$, c, e, r (3)
157. $a - b$, c, e, r (4)
158. $a + b$, e, f, r (13)
159. $a - b$, e, f, r (14)
160. $a + b$, c, e, β (3)
161. $a - b$, c, e, β (4)
162. $a + b$, e, f, β (13)
163. $a - b$, e, f, β (14)
164. $a + b$, e, f, α (13)
165. $a - b$, e, f, α (14)
166. a, r, $c + d$, β' (3)
167. a, r, $c - d$, β' (4)
168. $a + b$, $c + d$, e, r (33)
169. $a + b$, $c - d$, e, r (34)
170. $a - b$, $c - d$, e, r (35)
171. $a + b$, $c + d$, e, β (33)
172. $a + b$, $c - d$, e, β (34)
173. $a - b$, $c - d$, e, β (35)
174. $a + b$, c, r, $\alpha' - \beta'$ (58)
175. $a - b$, c, r, $\alpha' - \beta'$ (59)
176. $a + b$, f, r, $\alpha' - \beta'$ (60)
177. $a - b$, f, r, $\alpha' - \beta'$ (61)
178. $a + b$, f, r, ε (60)
179. $a - b$, f, r, ε (61)
180. $a + b$, f, α, ε (60)
181. $a - b$, f, α, ε (61)
182. $c^2 - d^2$, a, α', β' (69, 66)
183. $c^2 - d^2$, a, b, α' (69, 66)
184. $c^2 - d^2$, a, e, α' (69, 66)
185. $c^2 - d^2$, a, b, r (69, 66)
186. $c^2 - d^2$, a, r, β' (69, 66)
187. $a^2 - b^2$, c, r, β (69)
188. $a^2 - b^2$, f, r, β (82)
189. $a^2 - b^2$, e, r, γ' (69)
190. $a^2 - b^2$, e, r, α (82)
191. $a^2 - b^2$, e, r, ε (83)
192. $a^2 - b^2$, c, e, r (69)
193. $a^2 - b^2$, e, f, r (82)
194. $a^2 - b^2$, e, γ', δ' (69)
195. $a^2 - b^2$, e, α, β (82)
196. $a^2 - b^2$, e, β, ε (83)
197. $a^2 - b^2$, c, e, β (69)
198. $a^2 - b^2$, e, f, β (82)
199. $a^2 - b^2$, e, f, α (82)
200. $a^2 - b^2$, c, r, $\alpha' - \beta'$ (93)
201. $a^2 - b^2$, f, r, $\alpha' - \beta'$ (94)
202. $a^2 - b^2$, f, α, β (82)
203. $a^2 - b^2$, f, α, ε (94)
204. $a^2 - b^2$, f, r, ε (94)
205. $a^2 - b^2$, $c + d$, e, β (84)

Hosted by Google

206. $a^2 - b^2$, $c - d$, e, β (85)
207. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e, β (106)
208. $a^2 - b^2$, $c + d$, e, r (84)
209. $a^2 - b^2$, $c - d$, e, r (85)
210. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e, r (106)
211. F, a, α', β' (110)
212. F, e, α', β' (110)
213. F, a, b, α' (110)
214. F, a, e, β (110)
215. F, a, e, α' (110)
216. F, e, r, α' (110)
217. F, a, r, β (110)
218. F, a, b, r (110)
219. F, a, e, r (110)
220. F, a, r, β' (110)
221. F, $a + b$, e, β (116)
222. F, $a - b$, e, β (117)
223. F, $a + b$, e, r (116)
224. F, $a - b$, e, r, (117)
225. F, $a^2 - b^2$, e, β (126)
226. F, $a^2 - b^2$, e, r (126).

c) Durch r, a und c ſind auch α' und γ', mithin auch $\varepsilon = \alpha' + \gamma'$ und $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ gegeben. Es können alſo höchſtens nur je drei von dieſen Stücken unabhängig voneinander ſein, und ſind drei ſolche unabhängigen Stücke gegeben, ſo laſſen ſich die anderen daraus berechnen. Anſtatt einzelner Stücke können auch Aggregate derſelben gegeben ſein. Iſt z. B. $a + c$, r, $\alpha + \beta$ gegeben, ſo kann man a, c, α', γ', ε daraus berechnen. Das eben Geſagte gilt in derſelben Weiſe auch von den Größen r, b, d, β', δ', $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$, $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$.

227. a, c, β', δ'. Aufl. $\frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \pi - \beta' - \delta'$ (§ 7, 1).

228. a, c, α, ε. Aufl. $\frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§ 7, 1).

229. a, b, c, ε (228).

230. a, c, f, ε (228).

231. r, $f + e = s$, α' γ'. Aufl. $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{s}{2r}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 4, 1).

232. r, $f - e$, α', γ' (231), (§ 4, 3).

233. a, c, $b + d = s$, ε. Aufl. wie 228. $r = \frac{a}{2 \sin \alpha'}$, dann $\sin \beta' + \sin \delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s \sin \alpha'}{a}$, $\beta' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (§ 4, 1).

234. a, c, $b - d$, ε (233).

235. a, c, $f + e = s$, ε. 1. Aufl. wie 228, 231. 2. Aufl. (228); $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s \sin \frac{1}{2} \varepsilon}{a + c}$.

236. a, c, $f - e = g$, ε. 1. Aufl. wie 228 und 232. 2. Aufl. (228); $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{g \cos \frac{1}{2} \varepsilon}{a - c}$.

Hosted by Google

237. $a + c = s$, α' β', γ'. Aufl. $r = \frac{s}{2(\sin\alpha' + \sin\gamma')}$.

238. $a - c = g$, α', β', γ' (237). 241. $a + c = s$, f, α', γ' (237).

239. $a + c = s$, b, α', γ' (237). 242. $a - c = g$, f, α', γ' (241).

240. $a - c$, b, α', γ' (239).

243. $a + c = s$, r, β', δ'. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon = \pi - \beta' - \delta'$ (§ 4, 1).

244. $a - c$, r, β', δ' (243). 245. $a + c$, r, α, ε (243).

246. $a - c$, r, α, ε (244).

247. a, c, α, β. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§ 7, 2).

248. a, b, c, $\alpha + \beta$ (247). 251. b, d, α', $\alpha - \beta$ (247).

249. a, b, d, $\alpha - \beta$ (248). 252. a, c, f, $\alpha + \beta$ (247).

250. a, c, β', $\alpha + \beta$ (247). 253. b, d, f, $\alpha - \beta$ (252).

254. a, c, $b + d = s$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 247, dann $\sin\beta' + \sin\delta' = \frac{s\sin\alpha'}{a}$, $\beta' + \delta' = \pi - \alpha' - \gamma'$ (§ 4, 1).

255. a, c, $b - d$, $\alpha + \beta$ (254). 259. a, c, $f - e$, $\alpha + \beta$ (258).

256. b, d, $a + c$, $\alpha - \beta$ (254). 260. b, d, $f + e$, $\alpha - \beta$ (258).

257. b, d, $a - c$, $\alpha - \beta$ (254). 261. b, d, $f - e$, $\alpha - \beta$ (258).

258. a, c, $f + e = s$, $\alpha + \beta$ (247, 231)

262. $a + c = s$, r, α, β. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§ 4, 2).

263. $a - c$, r, α, β (262). 268. $a + c$, $b + d$, α', γ' (237, 243).

264. $a + c$, r, β', $\alpha + \beta$ (262). 269. $a - c$, $b + d$, α', γ' (268).

265. $a - c$, r, β', $\alpha + \beta$ (252). 270. $a + c$, $b - d$, α', γ' (268).

266. $b + d$, r, α', $\alpha - \beta$ (262). 271. $a - c$, $b - d$, α', γ' (268).

267. $b - d$, r, α', $\alpha - \beta$ (262).

272. $a + c = s$, $f + e = s'$, α', γ' (237, 231).

273. $a + c$, $f - e$, α', γ' (272). 274. $a - c$, $f + e$, α', γ' (272).

275. $a - c$, $f - e$, α', γ' (272).

276. $a + c = s$, $b + d = s'$, r, ε (243, 233).

277. $a + c$, $b - d$, r, ε (276). 278. $a - c$, $b - d$, r, ε (276).

279. $a + c = s$, $f + e = s'$, r, ε. 1. Aufl. (243, 231). 2. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s'\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{s}$, wodurch β' und δ' gefunden wird, dann wie 243.

280. $a + c$, $f - e$, r, ε (279). 281. $a - c$, $f + e$, r, ε (279).

Hosted by Google

282. $a - c = g$, $f - e = g'$, r, ε. 1. Aufl. (279, 1). 2. Aufl. (244); $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{g' \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{g}$.

283. $a + c$, $b + d$, r, $\alpha + \beta$ (262, 254).

284. $a - c = g$, $b + d = s$, r, $\alpha + \beta = \sigma$. 1. Aufl. (283). 2. Aufl. (263), dann $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s \cos \sigma}{g}$.

285. $a - c$, $b - d$, r, $\alpha + \beta$ (283). 286. $a + c$, $b + d$, r, $\alpha - \beta$ (283).

287. $a - c = g$, $b + d = s$, r, $\alpha - \beta = \tau$. 1. Aufl. (283). 2. Aufl. (266); $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{g \cos \frac{1}{2}\tau}{s}$.

288. $a - c$, $b - d$, r, $\alpha - \beta$ (283).

289. $b^2 - d^2 = g^2$, a, c, ε. Aufl. wie 228, dann $\sin \beta'^2 - \sin \delta'^2 = \frac{g^2}{4r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$, $\beta' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (§ 5, 3).

290. $f^2 - e^2 = g^2$, a, c, ε. 1. Aufl. wie 228, $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \frac{g^2}{4r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 5, 3). 2. Aufl. wie 228, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g^2 \sin \varepsilon}{a^2 - c^2}$.

291. $a + c = s$, $b^2 - d^2 = g^2$, α', γ' (237, 289).

292. $a - c$, $b^2 - d^2$, α', γ' (291).

293. $a + c = s$, $f^2 - e^2 = g^2$, α', γ' (237, 290).

294. $a - c$, $f^2 - e^2$, α', γ' (293).

295. $a + c = s$, $f^2 - e^2 = g^2$, r, ε (243, 290).

296. $a - c$, $f^2 - e^2$, r, ε (295).

297. $b^2 - d^2 = g^2$, a, c, $\alpha + \beta$. 1. Aufl. (247, 289). 2. Aufl. (247), dann $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g^2 \sin(\alpha + \beta)}{a^2 - c^2}$.

298. $f^2 - e^2 = g^2$, a, c, $\alpha + \beta$. Aufl. (247). $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \frac{g^2}{4r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$ (§ 5, 3).

299. $a^2 - c^2$, b, d, $\alpha - \beta$ (297). 300. $f^2 - e^2$, b, d, $\alpha - \beta$ (298).

301. $a + c$, $b^2 - d^2$, r, $\alpha + \beta$ (262, 289).

302. $a - c$, $b^2 - d^2$, r, $\alpha + \beta$ (301). 303. $a^2 - c^2$, $b + d$, r, $\alpha - \beta$ (301).

304. $a^2 - c^2$, $b - d$, r, $\alpha - \beta$ (301).

305. $a^2 - c^2 = g^2$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{g}{2\sqrt{\sin(\alpha' + \gamma') \sin(\alpha' - \gamma)}}$.

306. $a^2 - c^2 = g^2$, b, α', γ' (305). 307. $a^2 - c^2 = g^2$, f, α', γ' (305).

308. $a^2 - c^2 = g^2$, r, α, ε. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \gamma'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$, dann 305.

Hosted by Google

309. $a^2 - c^2$, r, β', δ' (308).
310. $a^2 - c^2$, b + d, α', γ' (305, 233).
311. $a^2 - c^2$, b − d, α', γ' (310).
312. $a^2 - c^2$, f + e, α', γ' (305, 231).
313. $a^2 - c^2$, f − e, α', γ' (312).
314. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α', γ' (305, 309).
315. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', γ'. 1. Aufl. (305, 290). 2. Aufl. (305), dann $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin \varepsilon}{g^2}$.
316. $a^2 - c^2$, b + d, r, ε (308, 233).
317. $a^2 - c^2$, b − d, r, ε (316).
318. $a^2 - c^2$, f + e, r, ε (308, 231).
319. $a^2 - c^2$, f − e, r, ε (318).
320. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, ε (308).
321. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, r, ε (308, 290).
322. $a^2 - c^2 = g^2$, r, α, β. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \gamma'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§ 5, 3).
323. $a^2 - c^2$, r, β', $\alpha + \beta$ (322).
324. $a^2 - c^2$, b + d, r, $\alpha + \beta$ (322, 243).
325. $a^2 - c^2$, b − d, r, $\alpha + \beta$ (324).
326. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, r, $\alpha + \beta$. 1. Aufl. (322, 297). 2. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin(\alpha + \beta)}{g^2}$ und (322).
327. $b^2 - d^2$, r, α', $\alpha - \beta$ (323).
328. $b^2 - d^2$, a + c, r, $\alpha - \beta$ (324).
329. $b^2 - d^2$, a − c, r, $\alpha - \beta$ (324).
330. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, $\alpha - \beta$ (326).
331. F, r, α', γ'. Aufl. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{F}{2r^2 \sin \varepsilon} = \frac{F}{2r^2 \sin(\alpha' + \gamma')}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 6, 1).
332. F, a, c, ε (228, 331)
333. F, a, c, $\alpha + \beta$ (247, 332)
334. F, b, d, $\alpha - \beta$ (333)
335. F, a + c, α', γ' (237, 331)
336. F, a − c, α', γ' (335)
337. F, a + c, r, ε (243, 331)
338. F, a − c, r, ε (337)
339. F, a + c, r, $\alpha + \beta$ (262, 331)
340. F, a − c, r, $\alpha + \beta$ (339)
341. F, b + d, r, $\alpha - \beta$ (339)
342. F, b − d, r, $\alpha - \beta$ (339)
343. F, $a^2 - c^2$, α', γ' (305, 331)
344. F, $a^2 - c^2$, r, ε (308, 331)
345. F, $a^2 - c^2$, r, $\alpha + \beta$ (322, 331)
346. F, $b^2 - d^2$, r, $\alpha - \beta$ (345).

d) Die folgenden Aufgaben lassen sich auf ähnliche Weise leicht auf c) zurückführen, wie die unter b) auf die unter a) zurückgeführt wurden.

347. a, b + d, α', γ' (243)
348. a, b − d, α', γ' (244)
349. a, f + e, α', γ' (231)
350. a, f − e, α', γ' (232)
351. f + e, a, c, α' (231)
352. f − e, a, c, α' (232)
353. b + d, a, c, α' (243)
354. b − d, a, c, α' (244)
355. b + d, a, c, r (243)
356. b − d, a, c, r (244)

Hosted by Google

357. $f + e$, a, c, r (231)
358. $f - e$, a, c, r (232)
359. $a + c$, b, r, ε (243)
360. $a - c$, b, r, ε (244)
361. $a + c$, f, r, ε (245)
362. $a - c$, f, r, ε (246)
363. $a + c$, f, α, ε (245)
364. $a - c$, f, α, ε (246)
365. $a + c$, b, r, $\alpha + \beta$ (264)
366. $a - c$, b, r, $\alpha + \beta$ (265)
367. $b + d$, a, r, $\alpha - \beta$ (266)
368. $b - d$, a, r, $\alpha - \beta$ (267)
369. $a + c$, b, β', $\alpha + \beta$ (264)
370. $a - c$, b, β', $\alpha + \beta$ (265)
371. $b + d$, a, α', $\alpha - \beta$ (266)
372. $b - d$, a, α', $\alpha - \beta$ (267)
373. $b + d$, a, r, γ' (243)
374. $b - d$, a, r, γ' (244)
375. $f + e$, a, r, γ' (231)
376. $f - e$, a, r, γ' (232)
377. $b + d$, r, a, ε (243)
378. $b - d$, r, a ε (244)
379. $f + e$, r, a, ε (231)
380. $f - e$, r, a, ε (232)
381. $a + c$, r, f, β (262)
382. $a - c$, r, f, β (263)
383. $a + c$, f, α, β (262)
384. $a - c$, f, α, β (263)
385. $a + c$, r, e, f (262)
386. $a - c$, r, e, f (263)
387. $a + c$, e, f, α (262)
388. $a - c$, e, f, α (263)
389. $a^2 - c^2$, b, r, ε (309)
390. $a^2 - c^2$, f, r, ε (308).
391. $a^2 - c^2$, f, α, ε (308)
392. $a^2 - c^2$, r, f, β (322)
393. $a^2 - c^2$, r, e, f (322)
394. $a^2 - c^2$, e, f, α (322)
395. $a^2 - c^2$, f, α, β (322)
396. $a^2 - c^2$, b, r, $\alpha + \beta$ (323)
397. $a^2 - c^2$, b, β', $\alpha + \beta$ (323)
398. $a^2 - c^2$, b, r, $\alpha - \beta$ (309)
399. $a^2 - c^2$, b, β' $\alpha - \beta$ (309)
400. $b^2 - d^2$, a, α', γ' (309)
401. $f^2 - e^2$, a, α', γ' (290)
402. $b^2 - d^2$, a, c, α' (309)
403. $f^2 - e^2$, a, c, α' (290)
404. $b^2 - d^2$, a, c, r (309)
405. $f^2 - e^2$, a, c, r (290)
406. $b^2 - d^2$, a, r, γ' (309)
407. $f^2 - e^2$, a, r, γ' (290)
408. $b^2 - d^2$, a, r, ε (309)
409. $f^2 - e^2$, a, r, ε (290)
410. F, a, α', γ' (331)
411. F, a, c, α' (331)
412. F, a, c, r (331)
413. F, a, r, γ' (331)
414. F, a, r, ε (331).

e) Durch r, e und f sind auch β und α, mithin auch $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ und $\beta' - \delta' = \alpha - \beta$ gegeben. Es können also nur höchstens je drei dieser Stücke voneinander unabhängig sein, und sind drei solche unabhängigen Stücke gegeben, so lassen sich alle anderen Stücke daraus berechnen. Anstatt einzelner Stücke können Aggregate derselben gegeben sein. Ist z. B. $f + e$, r, $\alpha \pm \beta$ oder $f^2 - e^2$, r, $\alpha \pm \beta$ gegeben, so kann man f, e, r, α, β daraus berechnen.

415. e, f, α', γ'. Aufl. $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{e}{f}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 7, 1).

416. a, e, f, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 415, $\sin \alpha' = \frac{a \sin \beta}{e}$.

Hosted by Google

417. a, e, f, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{e}{f}$ (§ 7, 2), $\sin\alpha' = \frac{a \sin\beta}{e}$.

418. $f + e = s$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{s}{4\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')\cos\frac{1}{2}(\beta' - \delta')}$
$= \frac{s}{4\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$.

419. $f - e$, α', β', γ' (418). 420. $f + e$, a, α, β (418).

421. $f - e$, a, α, β (419).

422. $f + e = s$, r, α', γ'. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{2r}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 4, 1).

423. $f - e$, r, α', γ' (422)
424. $f + e$, r, β', $\alpha + \beta$ (422)
425. $f - e$, r, β', $\alpha + \beta$ (422)
426. $f + e$, r, α', $\alpha - \beta$ (422)
427. $f - e$, r, α', $\alpha - \beta$ (422)
428. $f + e$, a, r, $\alpha + \beta$ (422)
429. $f - e$, a, r, $\alpha + \beta$ (428)
430. $f + e$, a, r, $\alpha - \beta$ (428)
431. $f - e$, a, r, $\alpha - \beta$ (428).

432. $a + c = s$, e, f, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$
$= \frac{s \sin\alpha}{f}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - \sigma$ (§ 4, 2).

433. $a - c$, e, f, $\alpha + \beta$ (432).

434. $a + c$, e, f, $\alpha - \beta$. 1. Aufl. (432). 2. Aufl. wie 415; $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{(a + c)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{f + e}$.

435. $a - c$, e, f, $\alpha - \beta$ (432).

436. $a + b = s$, e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$
$= \frac{s \sin\beta}{e}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§ 4, 1).

437. $a - b$, e, f, $\alpha + \beta$ (436)
438. $a + b$, e, f, $\alpha - \beta$ (436)
439. $a - b$, e, f, $\alpha - \beta$ (436)
440. $a + c$, $e + f$, α, β (418, 432)
441. $a - c$, $f + e$, α, β (440)
442. $a + c$, $f - e$, α, β (440)
443. $a - c$, $f - e$, α, β (440)
444. $a + b$, $f + e$, α, β (418, 13)
445. $a - b$, $f + e$, α, β (444)
446. $a + b$, $f - e$, α, β (444)
447. $a - b$, $f - e$, α, β (444)

448. $a + b$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (422, 13).

449. $a - b$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (448)
450. $a + b$, $f - e$, r, $\alpha + \beta$ (448)
451. $a - b$, $f - e$, r, $\alpha + \beta$ (448)
452. $a + b$, $f + e$, r, $\alpha - \beta$ (448)
453. $a - b$, $f + e$, r, $\alpha - \beta$ (448)
454. $a + b$, $f - e$, r, $\alpha - \beta$ (448)
455. $a - b$, $f - e$, r, $\alpha - \beta$ (448)

456. $a + c$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (422, 262).

Hosted by Google

457. $a - c, f + e, r, \alpha + \beta$ (456) 461. $a - c, f + e, r, \alpha - \beta$ (456)
458. $a + c, f - e, r, \alpha + \beta$ (456) 462. $a + c, f - e, r, \alpha - \beta$ (456)
459. $a - c, f - e, r, \alpha + \beta$ (456) 463. $a - c, f - e, r, \alpha - \beta$ (456).
460. $a + c, f + e, r, \alpha - \beta$ (456)

464. $a^2 - b^2 = g^2, e, f, \alpha + \beta$. Aufl. wie 415; $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin \beta^2}{e^2}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§ 5, 3).

465. $a^2 - b^2, e, f, \alpha - \beta$ (464).

466. $a^2 - c^2 = g^2, e, f, \alpha + \beta$. Aufl wie 415; $\sin \alpha'^2 - \sin \gamma'^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin \beta^2}{e^2}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§ 5, 4).

467. $a^2 - c^2, e, f, \alpha - \beta$ (466) 470. $a^2 - c^2, f + e, \alpha, \beta$ (418, 322)
468. $a^2 - b^2, f + e, \alpha, \beta$ (418, 82) 471. $a^2 - c^2, f - e, \alpha, \beta$ (470)
469. $a^2 - b^2, f - e, \alpha, \beta$ (468)
472. $a^2 - b^2, f + e, r, \alpha + \beta$ (422, 82).
473. $a^2 - b^2, f - e, r, \alpha + \beta$ (472) 474. $a^2 - b^2, f + e, r, \alpha - \beta$ (472)
475. $a^2 - b^2, f - e, r, \alpha - \beta$ (472)
476. $a^2 - c^2, f + e, r, \alpha + \beta$ (422, 322).
477. $a^2 - c^2, f - e, r, \alpha + \beta$ (476) 478. $a^2 - c^2, f + e, r, \alpha - \beta$ (476).
479. $a^2 - c^2, f - e, r, \alpha - \beta$ (476).

480. $f^2 - e^2 = g^2, \alpha, \beta, \varepsilon$. Aufl. $r = \frac{g}{2 \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}$.

481. $f^2 - e^2 = g^2, a, \alpha, \beta$ (480) 485. $f^2 - e^2, a - c, \alpha, \beta$ (484)
482. $f^2 - e^2, a + b, \alpha, \beta$ (480, 13) 486. $f^2 - e^2, a^2 - b^2, \alpha, \beta$ (480, 82)
483. $f^2 - e^2, a - b, \alpha, \beta$ (482) 487. $f^2 - e^2, a^2 - c^2, \alpha, \beta$ (480, 322)
484. $f^2 - e^2, a + c, \alpha, \beta$ (480, 262)

488. $f^2 - e^2 = g^2, r, \alpha', \gamma'$. Aufl. $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 5, 3).

489. $f^2 - e^2, r, \beta', \alpha + \beta$ (488) 492. $f^2 - e^2, a, r, \alpha - \beta$ (491)
490. $f^2 - e^2, r, \alpha', \alpha - \beta$ (488) 493. $f^2 - e^2, b, \beta', \alpha + \beta$ (489)
491. $f^2 - e^2, b, r, \alpha + \beta$ (488) 494. $f^2 - e^2, a, \alpha', \alpha - \beta$ (490)
495. $f^2 - e^2, a + b, r, \alpha + \beta$ (488, 13).
496. $f^2 - e^2, a - b, r, \alpha + \beta$ (495) 497. $f^2 - e^2, a + b, r, \alpha - \beta$ (495)
498. $f^2 - e^2, a - b, r, \alpha - \beta$ (495).
499. $f^2 - e^2, a + c, r, \alpha + \beta$ (488, 262).
500. $f^2 - e^2, a - c, r, \alpha + \beta$ (499) 501. $f^2 - e^2, a + c, r, \alpha - \beta$ (499).
502. $f^2 - e^2, a - c, r, \alpha - \beta$ (499).
503. $f^2 - e^2, a^2 - b^2, r, \alpha + \beta$ (488, 82).

Hosted by Google

504. $f^2 - e^2$, $a^2 - b^2$, r, $\alpha - \beta$ (503).
505. $f^2 - e^2$, $a^2 - c^2$, r, $\alpha + \beta$ (488, 322).
506. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, r, $\alpha - \beta$. 1. Aufl. (505).
2. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g'^2 \sin(\alpha - \beta)}{g^2}$, dann wie 480.
507. F, r, α, β. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{F}{2\,r^2 \sin\alpha \sin\beta}$.
508. F, e, r, α. Aufl. wie 507. 509. F, e, α, β. Aufl. wie 507.
510. F, e, f, r. Aufl. wie 507.
511. F, e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 415, $r = \frac{e}{2 \sin\alpha}$, wie 507.
512. F, e, f, $\alpha - \beta$ (511)
513. F, f + e, α, β 418, 507)
514. F, f − e, α, β (513)
515. F, f + e, r, $\alpha + \beta$ (422, 507)
516. F, f − e, r, $\alpha + \beta$ (515)
517. F, f + e, r, $\alpha - \beta$ (515)
518. F, f − e, r, $\alpha - \beta$ (515)
519. F, $f^2 - e^2$, α, β (480, 507)
520. F, $f^2 - e^2$, r, $\alpha + \beta$ (488, 507)
521. F, $f^2 - e^2$, r, $\alpha - \beta$ (520).

f) F, e, f, ε sind voneinander abhängig. Sind drei dieser Stücke gegeben, so läßt sich das vierte mittelst der Gleichung $2F = ef \sin\varepsilon$ berechnen.

522. F, e, α, ε. Aufl. $f = \frac{2F}{e \sin\varepsilon}$, $\sin\beta = \frac{e \sin\alpha}{f}$.
523. F, e, α', γ' (522, 415).
524. F, e, β, ε (522).
525. F, e, r, ε (522).
526. F, r, β, ε. Aufl. $\sin\alpha = \frac{F}{2\,r^2 \sin\beta \sin\varepsilon}$.
527. F, f + e = s, α, ε. Aufl. $ef = \frac{2F}{\sin\varepsilon}$ (§ 10), dann 522.
528. F, f − e, α, ε (527).
529. F, f + e, α', γ' (527, 415).
530. F, f − e, α', γ' (529).
531. F, f + e, r, ε. Aufl. wie 527, $\sin\alpha = \frac{f}{2r}$, $\sin\beta = \frac{e}{2r}$.
532. F, f − e, r, ε (531)
533. F, $f^2 + e^2$, α, ε (527)
534. F, $f^2 - e^2$, α, ε (527)
535. F, $f^2 + e^2$, α', γ' (529)
536. F, $f^2 - e^2$, α', γ' (529)
537. F, $f^2 + e^2$, r, ε (531)
538. F, $f^2 - e^2$, r, ε (531)
539. F, e, f, α.

g) a + b, c − d, ε, α sind voneinander abhängig, so daß sich aus dreien dieser Stücke das vierte berechnen läßt, da $\frac{a+b}{c-d} = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)}$, also $\frac{(a+b)+(c-d)}{(a+b)-(c-d)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ ist. Etwas Ähnliches gilt, wenn statt ε oder α ihre Aggregate $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$, $\gamma' - \delta' = \varepsilon + \alpha - \pi$ gegeben sind.

Hosted by Google

540. $a + b = s$, $c - d = g$, α', γ'. Aufl. $-\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)} = \frac{s}{g}$ (§ 7, 11), dann 7.

541. $a + b$, $c - d$, ε, β (540)
542. a, b, $c - d$, ε (540, 41)
543. $a + b$, c, d, ε (540, 41)
544. $a + b$, $c - d$, r, ε (540, 60)
545. $a + b$, $c - d$, f, ε (540, 60)
546. $a + b$, $c - d$, e, ε (541, 48).

547. $a + b = s$, $c - d = g$, α, β. Aufl. $-\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)} = \frac{s}{g}$ (§ 7, 11), dann wie 7.

548. $a + b$, $c - d$, β', γ' (547)
549. a, b, $c - d$, α (547, 41)
550. $a + b$, c, d, α (547, 41)
551. $a + b$, $c - d$, r, α (547, 60)
552. $a + b$, $c - d$, f, α (547, 60)
553. $a + b$, $c - d$, r, f (552)
554. $a + b$, $c - d$, e, α (547, 48).

555. $a + b = s$, $c - d = g$, γ', $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\gamma' - \delta') = \frac{g\cos\frac{1}{2}\tau}{s}$, dann wie 7.

556. $a + b$, c, d, $\alpha' - \beta'$ (555), dann ähnlich wie 41.
557. $a + b$, $c - d$, f, $\alpha' - \beta'$ (555, 60).
558. $a+b$, $c-d$, α', $\gamma'-\delta'$ (555). 559. a, b, $c - d$, $\gamma' - \delta'$ (556).
560. $a + b$, $c - d$, f, $\gamma' - \delta'$ (557).

561. $a + b = s$, c, ε, α. Aufl. $c - d = -\frac{s\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)}$, dann 41.

562. $a + b = s$, $c + d = s'$, α, ε (561).

563. $a + b = s$, $c^2 - d^2 = g^2$, α, ε. 1. Aufl. (561, 562). 2. Aufl. $a - b = -\frac{g^2\sin(\varepsilon-\alpha)}{s\sin(\varepsilon+\alpha)}$, dann wie 41.

564. $c - d$, a, α, ε (561).
565. $a - b$, $c - d$, α, ε (561).
566. $a^2 - b^2$, $c - d$, α, ε (563).

567. F, $a + b = s$, α, ε. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{4F\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)^2}{g^2\sin\alpha\sin\varepsilon}$, dann wie 7 oder 539.

568. F, $c - d = g$, α, ε. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{4F\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)^2}{g^2\sin\alpha\sin\varepsilon}$, dann ähnlich wie 7 oder 539.

569. F, $a+b$, $c-d$, ε (540, 567). 570. F, $a+b$, $c-d$, α (547, 567).
571. F, $a + b$, $c - d$, $\alpha' - \beta'$ (555, 567).
572. F, $a + b$, $c - d$, $\gamma' - \delta'$ (571).

h) $a + c$, $b - d$, α, β sind voneinander abhängig, so daß sich aus dreien dieser Stücke das vierte berechnen läßt, da $\frac{a+c}{b-d} =$

Hosted by Google

$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$, alſo $\frac{(a+c)+(b-d)}{(a+c)-(b-d)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}$ iſt. Anſtatt α und β kann auch $\alpha \doteq \beta$ gegeben ſein.

573. $a+c=s$, $b-d=g$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{s}{g}$ (§ 7, 7), dann wie 237.

574. $a+c$, $b-d$, β', γ' (573) 577. a, c, $b-d$, α (576)

575. $a+c$, $b-d$, α', δ' (573) 578. $a+c$, $b-d$, r, α (573, 261)

576. $a+c$, b, d, α (573, 246)

579. $a+c$, $b-d$, f, α. Aufl. wie 578.

580. $a+c$, $b-d$, r, f. Aufl. wie 578.

581. $a+c=s$, $b-d=g$, $f+e=s'$, α (573, 440), oder $\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{s'}$.

582. $a+c$, $b-d$, $f-e$, α (581).

583. $a+c$, $b-d$, f^2-e^2, α (573, 484).

584. $a+c=s$, b, α, β. Aufl. $b-d=\frac{s\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, dann 247.

585. $a+c$, $b+d$, α, β (584, 247).

586. $a+c=s$, $b^2-d^2=g^2$, α, β. 1. Aufl. (584, 585). 2. Aufl. $a-c=\frac{g^2\sin(\alpha+\beta)}{s\sin(\alpha-\beta)}$, dann wie 247.

587. $b-d$, a, α, β (584). 588. $a-c$, $b-d$, α, β (585).

589. a^2-c^2, $b-d$, α, β. Aufl. ähnlich wie 586.

590. $a+c=s$, $b-d=g$, β', $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{g\sin\frac{1}{2}\sigma}{s}$, dann wie 237.

591. $a+c$, b, d, $\alpha+\beta$ (590, 247).

592. $a+c$, $b-d$, f, $\alpha+\beta$. Aufl. wie 590, $r=\frac{f}{2\sin\alpha}$, dann wie 262.

593. $a+c=s$, $b-d=g$, $f+e=s'$, $\alpha+\beta$. Aufl. wie 590 und 440, oder $\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{s'}$.

594. $a+c$, $b-d$, $f-e$, $\alpha+\beta$ (593).

595. $a+c$, $b-d$, f^2-e^2, $\alpha+\beta$ (590, 484).

596. $a+c$, $b-d$, α', $\alpha-\beta$ (590). 597. a, c, $b-d$, $\alpha-\beta$ (591).

598. $a+c$, $b-d$, f, $\alpha-\beta$ (592).

599. $a+c$, $b-d$, $f+e$, $\alpha-\beta$ (593).

600. $a+c$, $b-d$, $f-e$, $\alpha-\beta$ (593).

601. $a+c$, $b-d$, f^2-e^2, $\alpha-\beta$ (595).

Hosted by Google

602. F, $a + c = s$, α, β. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s^2 \sin\alpha \sin\beta}{4F \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}$.

603. F, $b - d$, α, β (602). 604. F, $a+c$, $b-d$, α (573, 602).

605. F, $a + c$, $b - d$, $\alpha + \beta$ (590, 604).

606. F, $a + c$, $b - d$, $\alpha - \beta$ (605).

i) $a + c$, $f + e$, β', δ' sind voneinander abhängig, so daß sich aus drei von diesen Stücken das vierte berechnen läßt, denn $\frac{f+e}{a+c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}$, und somit $\frac{(f+e)-(a+c)}{(f+e)+(a+c)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'$. Anstatt β' und δ' kann auch $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$ oder $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$ gegeben sein. Dieselbe Eigenschaft besitzen noch $a - c$, $f - e$, β', δ', ferner $b + d$, $f + e$, $\alpha + \beta$, ε, endlich $b - d$, $f - e$, $\alpha + \beta$, ε.

607. $a + c = s$, $f + e = s'$, α, ε. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{s' \sin\frac{1}{2}\varepsilon}{s}$.

608. $a - c = g$, $f - e = g'$, α, ε. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{g' \cos\frac{1}{2}\varepsilon}{g}$,

609. $a + c$, e, f, ε (607, 415). 610. $a - c$, e, f, ε (609).

611. $a+c$, $f+e$, b, ε. Aufl. wie 607, $r = \frac{b}{2\sin\beta}$, dann wie 243.

612. $a - c$, $f - e$, b, ε (611).

613. $a + c = s$, $b + d = s'$, $f + e = s''$, ε (607), dann $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{s'' \cos\frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$ (237, 418).

614. $a - c$, $b - d$, $f - e$, ε (613).

615. $a + c$, $b - d$, $f + e$, ε. Aufl. wie 607 und ähnlich wie 274.

616. $a - c$, $b + d$, $f - e$, ε (615).

617. $a + c$, $f + e$, $b^2 - d^2$, ε (607, 312).

618. $a - c$, $f - e$, $b^2 - d^2$, ε (617).

619. $a + c = s$, $f + e = s'$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s \cos\frac{1}{2}\tau}{s'}$, dann (237, 418).

620. $a - c = g$, $f - e = g'$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{g \sin\frac{1}{2}\tau}{g'}$, dann wie 238 oder 419.

621. $b + d = s$, $f + e = s'$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s \sin\frac{1}{2}\sigma}{s'}$, dann (418, 237).

622. $b - d = g$, $f - e = g'$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{g \cos\frac{1}{2}\sigma}{g'}$, dann (419, 238).

Hosted by Google

623. $f+e, a, c, \alpha-\beta$ (619, 227). 625. $f+e, b, d, \alpha+\beta$ (621, 227).
624. $f-e, a, c, \alpha-\beta$ (620, 227). 626. $f-e, b, d, \alpha+\beta$ (622, 227).
627. $a+c, f+e, b, \alpha-\beta$ (619, 243, 231).
628. $a-c, f-e, b, \alpha-\beta$ (620, 627). 629. $b+d, f+e, a, \alpha+\beta$ (621, 627).
630. $b-d, f-e, a, \alpha+\beta$ (622, 627).
631. $a+c=s,\ b+d=s',\ f+e=s'',\ \alpha-\beta=\tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s\cos\frac{1}{2}\tau}{s''}$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{s''\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$, dann (237, 418).
632. $a-c=g,\ b-d=g',\ f-e=g'',\ \alpha-\beta=\tau$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{g\sin\frac{1}{2}\tau}{g''}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{g''\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{g'}$, dann wie 238 oder 419.
633. $a+c, b+d, f+e, \alpha+\beta$ (632). 634. $a-c, b-d, f-e, \alpha+\beta$ (633).
635. $a+c, f+e, b^2-d^2, \alpha-\beta$ (620 und 310 oder 312).
636. $a-c, f-e, b^2-d^2, \alpha-\beta$ (620, 311, 313).
637. $a^2-c^2, b+d, f+e, \alpha+\beta$ (635).
638. $a^2-c^2, b-d, f-e, \alpha+\beta$ (636).
639. $f+e=s,\ a,\ \beta',\ \delta'$. Aufl. $a+c=\frac{s\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}$, dann wie 227.
640. $f-e=g,\ a,\ \beta',\ \delta'$. Aufl. $a-c=\frac{g\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{g\sin\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}$, dann wie 227.
641. $a-c,=g,\ f+e,\ \beta',\ \delta'$. 1. Aufl. (639). 2. Aufl. $f-e=\frac{g\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}$.
642. $a^2-c^2,\ f+e,\ \beta',\ \delta'$. 1. Aufl. (639, 641). 2. Aufl. $f-e=\frac{(a^2-c^2)\sin(\alpha-\beta)}{(f+e)\sin\varepsilon}$.
643. $a+c=s,\ f-e,\ \beta',\ \delta'$. 1. Aufl. (640). 2. Aufl. $f+e=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}$.
644. $a^2-c^2,\ f-e,\ \beta',\ \delta'$. 1. Aufl. (640, 643). 2. Aufl. $f+e=\frac{(a^2-c^2)\sin(\beta'-\delta')}{(f-e)\sin\varepsilon}$.
645. $a+c=s,\ e,\ \beta',\ \delta'$. Aufl $f+e=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}$, dann wie 415.

Hosted by Google

646. $a - c = g$, e, β', δ'. Aufl. $f - e = \frac{g \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{g \sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta')}$, dann wie 415.

647. $a + c = s$, $f^2 - e^2 = g^2$, β', δ'. 1. Aufl. wie 645. 2. Aufl. $a - c = \frac{g^2 \sin(\beta' + \delta')}{s \sin(\beta' - \delta')}$, dann wie 227.

648. $a - c$, $f^2 - e^2$, β', δ' (647).

649. $f + e = s$, a, c, β'. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{s}{a + c}$ (§ 7, 11), dann wie 227.

650. $f - e = g$, a, c, β'. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{g}{a - c}$ (§ 7, 7), dann wie 227.

651. $a + c = s$, e, f, β' (649, 415). 652. $a - c = g$, e, f, β' (650, 415)

653. $a + c$, $f + e$, α', β' (649, 237, 418).

654. $a - c$, $f - e$, α', β' (650, 238, 419).

655. $a + c$, $f + e$, r, β' (649, 243, 422).

656. $a - c$, $f - e$, r, β' (650, 244, 423).

657. $a + c$, $f + e$, b, β' (655). 659. $a + c$, $f + e$, b, r (655).

658. $a - c$, $f - e$, b, β' (655). 660. $a - c$, $f - e$, b, r (656).

661. $a + c$, $b + d$, $f + e$, β' (649, 268, 272).

662. $a + c$, $b - d$, $f + e$, β' (649, 269, 274).

663. $a - c$, $b + d$, $f - e$, β' (650, 270, 273).

664. $a - c$, $b - d$, $f - e$, β' (650, 271, 275).

665. $a + c$, $b^2 - d^2$, $f + e$, β' (649, 310, 312).

666. $a - c$, $b^2 - d^2$, $f - e$, β' (650, 311, 313).

667. F, $a + c$, β', δ' (646, 529). 668. F, $a - c$, β', δ' (646, 530).

669. F, $a + c$, $f + e$, ε. 1. Aufl. (607, 529). 2. Aufl. (527, 609).

670. F, $a - c$, $f - e$, ε. 1. Aufl. (608, 530). 2. Aufl. (528, 610)

671. F, $a+c$, $f+e$, $\alpha-\beta$ (619, 529) 679. F, $a + c$, e, ε (522, 609)

672. F, $a-c$, $f-e$, $\alpha-\beta$ (620, 530) 680. F, $a - c$, e, ε (522, 610)

673. F, $b+d$, $f+e$, $\alpha+\beta$ (621, 529) 681. F, $a - c$, $f + e$, ε (527, 610)

674. F, $b-d$, $f-e$, $\alpha+\beta$ (622, 530) 682. F, $a + c$, $f - e$, ε (528, 609)

675. F, $a+c$, $f+e$, β' (649, 529) 683. F, $f^2 + e^2$, $a + c$, ε (533, 609)

676. F, $a-c$, $f-e$, β' (650, 530) 684. F, $f^2 + e^2$, $a - c$, ε (533, 610)

677. F, e, f, $a + c$ (539, 609) 685. F, $f^2 - e^2$, $a + c$, ε (534, 609)

678. F, e, f, $a - c$ (539, 610) 686. F, $f^2 - e^2$, $a - c$, ε (534, 610).

k) F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, α, ε sind voneinander abhängig, so daß aus je dreien dieser Stücke sich die beiden übrigen stets berechnen lassen.

Hosted by Google

Es ist nämlich $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = -\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)}$, oder $\frac{(a^2-b^2)-(c^2-d^2)}{-(a^2-b^2)-(c^2-d^2)} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}$, und $\frac{a^2-b^2}{2F} = \frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha\sin\varepsilon} = \cot\alpha - \cot\varepsilon$. Anstatt α und ε kann auch $\alpha'-\beta' = \varepsilon-\alpha$, oder $\gamma'-\delta' = \varepsilon+\alpha-\pi$ gegeben sein.

687. $a^2-b^2 = g^2$, $c^2-d^2 = g'^2$, α, β. Aufl. $\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)} = -\frac{g^2}{g'^2}$ (§ 7, 8), dann wie 77.

688. a^2-b^2, c^2-d^2, β', γ' (687)
689. a, b, c^2-d^2, α (687, 41)
690. a^2-b^2, c^2-d^2, r, α (687, 94)
691. a^2-b^2, c^2-d^2, f, α (690)
692. a^2-b^2, c^2-d^2, r, f (690)
693. a^2-b^2, c^2-d^2, e, α (687, 97).

694. $a^2-b^2 = g^2$, $c^2-d^2 = g'^2$, ε, β. Aufl. $\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)} = -\frac{g^2}{g'^2}$ (§ 7, 7), dann wie 77.

695. a^2-b^2, c^2-d^2, α', γ' (694)
696. a, b, c^2-d^2, ε (694, 41)
697. a^2-b^2, c^2-d^2, r, ε (694, 94)
698. a^2-b^2, c^2-d^2, f, ε (694, 94)
699. a^2-b^2, c^2-d^2, ε (694, 97).

700. $a^2-b^2 = g^2$, $c^2-d^2 = g'^2$, $f+e = s$, α. Aufl. wie 687. Ferner ist $g = 2r\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}\cdot\sqrt{\sin\beta}$. Damit $\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}$ nicht imaginär werde, muß $\varepsilon-\alpha = \alpha'-\beta' > 0$ sein, woraus $\alpha' > \beta'$ oder $a > b$ folgt. Eliminiert man r aus diesem Ausdrucke und dem für s, so erhält man $\sin\beta - \frac{s}{g}\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}\cdot\sqrt{\sin\beta} + \sin\alpha = 0$ (§ 10).

701. a^2-b^2, c^2-d^2, $f-e$, α (700).
702. a^2-b^2, c^2-d^2, $f+e$, ε (694, 700).
703. a^2-b^2, c^2-d^2, $f-e$, ε (694, 701).
704. $a^2-b^2 = g^2$, $c^2-d^2 = g'^2$, $f^2-e^2 = g''^2$, α (688), dann $\sin\beta^2 + \frac{g''^2}{g^2}\sin(\varepsilon-\alpha)\sin\beta - \sin\alpha^2 = 0$, dann wie 77.
705. a^2-b^2, c^2-d^2, f^2-e^2, ε (694, 704).

706. $a^2-b^2 = g^2$, c, α, ε. Aufl. $c^2-d^2 = -\frac{g^2\sin(\varepsilon+\alpha)}{\sin(\varepsilon-\alpha)}$, dann wie 41.

707. a^2-b^2, $f+e$, α, ε (700).
708. a^2-b^2, $f-e$, α, ε (700).
709. a^2-b^2, f^2-e^2, α, ε (704).

710. $a^2-b^2 = g^2$, $c^2-d^2 = g'^2$, γ', $\alpha'-\beta' = \tau$. Aufl. $\sin(\gamma'-\delta') = \frac{g'^2\sin\tau}{g^2}$.

711. a^2-b^2, c, d, $\alpha'-\beta'$ (710, 41).

Hosted by Google

712. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, f, $\alpha' - \beta'$ (710, 94).
713. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f + e$, $\alpha' - \beta'$ (710, 700).
714. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f - e$, $\alpha' - \beta'$ (710, 701).
715. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha' - \beta'$ (710, 704).
716. F, $a^2 - b^2 = g^2$, β, ε. Aufl. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \dfrac{2F}{g^2 \sin\varepsilon}$ (§ 7, 7), dann wie 77.
717. F, $a^2 - b^2$, α', γ' (716)
718. F, a, b, ε (716, 41)
719. F, $a^2 - b^2$, c, ε (716, 706)
720. F, $a^2 - b^2$, r, ε (716, 94)
721. F, $a^2 - b^2$, f, ε (716, 94)
722. F, $a^2 - b^2$, e, ε (716, 98).
723. F, $a^2 - b^2 = g^2$, $c + d$, ε (716), $c^2 - d^2 = -\dfrac{2F \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sin\alpha \sin\varepsilon}$, dann wie 41.
724. F, $a^2 - b^2$, $c - d$, ε (723)
725. F, $a^2 - b^2$, $f + e$, ε (716, 700)
726. F, $a^2 - b^2$, $f - e$, ε (725)
727. F, $a^2 - b^2$, $f^2 - e^2$, ε (716, 704)
728. F, $a^2 - b^2 = g^2$, α, β. Aufl. $\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \dfrac{2F}{g^2 \sin\alpha}$ (§ 7, 8) dann wie 77.
729. F, $a^2 - b^2 = g^2$, β', γ' (728)
730. F, a, b, α (728, 41)
731. F, $a^2 - b^2$, c, α (728, 706)
732. F, $a^2 - b^2$, r, α (728, 94)
733. F, $a^2 - b^2$, f, α (732)
734. F, $a^2 - b^2$, f, r (732)
735. F, $a^2 - b^2$, e, α (728, 98)
736. F, $a^2 - b^2$, $c + d$, α (728, 723)
737. F, $a^2 - b^2$, $c - d$, α (736)
738. F, $a^2 - b^2$, $f + e$, α (728, 700)
739. F, $a^2 - b^2$, $f - e$, α (728, 701)
740. F, $a^2 - b^2$, $f^2 - e^2$, α (728, 704).
741. F, $a^2 - b^2 = g^2$, γ', $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. $\cos(\gamma' - \delta') = \dfrac{4F}{g^2} \sin\tau - \cos\tau$ (§ 3, 2), dann wie 77.
742. F, $a^2 - b^2$, c, $\alpha' - \beta'$ (741, 706).
743. F, $a^2 - b^2$, f, $\alpha' - \beta'$ (741, 522).
744. F, $a^2 - b^2$, $c + d$, $\alpha' - \beta'$ (741, 724).
745. F, $a^2 - b^2$, $c - d$, $\alpha' - \beta'$ (744).
746. F, $a^2 - b^2$, $f + e$, $\alpha' - \beta'$ (741, 700).
747. F, $a^2 - b^2$, $f - e$, $\alpha' - \beta'$ (741, 701).
748. F, $a^2 - b^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha' - \beta'$ (741, 704).
749. F, $a^2 - b^2 = g^2$, α', $\gamma' - \delta' = \tau$. Aufl. $4F \sin(\alpha' - \beta') - g^2 \cos(\alpha' - \beta') = g^2 \cos\tau$ (§ 3, 1), dann wie 77.
750. F, a, b, $\gamma' - \delta'$ (749, 41)
751. F, $a^2 - b^2$, c, $\gamma' - \delta'$ (749, 706)
752. F, $a^2 - b^2$, r, $\gamma' - \delta'$ (749, 94)
753. F, $a^2 - b^2$, e, $\gamma' - \delta'$ (749, 98)
754. F, $a^2 - b^2$, f, $\gamma' - \delta'$ (749, 94).
755. F, $a^2 - b^2$, $c + d$, $\gamma' - \delta'$ (749, 723).
756. F, $a^2 - b^2$, $c - d$, $\gamma' - \delta'$ (755).
757. F, $a^2 - b^2$, $f + e$, $\gamma' - \delta'$ (749, 700).

Hosted by Google

758. F, $a^2 - b^2$, $f - e$, $\gamma' - \delta'$ (749, 701).
759. F, $a^2 - b^2$, $f^2 - e^2$, $\gamma' - \delta'$ (749, 704).
760. F, $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, β. Aufl. $\cot\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{4F}$, $\cot\varepsilon = -\frac{g^2 + g'^2}{4F}$, oder $\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \frac{2F}{g^2 \sin\alpha}$ (§ 7, 8), dann wie 77.
761. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, α' (760)
762. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, β' (760)
763. F, a, b, $c^2 - d^2$ (760, 41)
764. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, r (760, 94)
765. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e (760, 98)
766. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, f (760, 94)
767. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f + e$ (760, 700).
768. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f - e$ (760, 701).
769. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f^2 - e^2$ (760, 704).
770. F, $a + b$, α, ε. Aufl. $a^2 - b^2 = \frac{2F \sin(\varepsilon - \alpha)}{\sin\varepsilon \sin\alpha}$.
771. F, $a - b$, α, ε (770).
772. F, a, α, ε (770, 41).
773. F, ab, α, ε (770).

l) $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α, β, F sind voneinander abhängig, so daß aus dreien dieser Stücke die beiden anderen sich stets berechnen lassen, denn $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$, mithin $\frac{(a^2 - c^2) + (b^2 - d^2)}{(a^2 - c^2) - (b^2 - d^2)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

774. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{g^2}{g'^2}$, (§ 7, 7), dann wie 305.
775. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, β', γ' (774)
776. a, c, $b^2 - d^2$, α (774, 247)
777. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, α (774, 322)
778. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, α (777)
779. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, r (777)
780. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, e, α (774, 322)
781. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$, α (774, 470).
782. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$, α (774, 471).
783. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, α (774, 487).
784. $a^2 - c^2 = g^2$, b, α, β. Aufl. $b^2 - d^2 = \frac{g^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$, dann wie 247.
785. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin\sigma}{g^2}$, dann wie 305.
786. $a^2 - c^2$, b, d, $\alpha + \beta$ (785, 247).
787. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, $\alpha + \beta$ (785, 322).
788. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$, $\alpha + \beta$ (785, 470).
789. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$, $\alpha + \beta$ (785, 471).
790. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (785, 487).

Hosted by Google

791. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2 \sin \tau}{g'^2}$, dann wie 305.

792. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha - \beta$ (791, 247).

793. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, $\alpha - \beta$ (791, 322).

794. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$, $\alpha - \beta$ (791, 470).

795. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$, $\alpha - \beta$ (791, 471).

796. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (791, 487).

797. F, $a^2 - c^2 = g^2$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{g^2 \sin \alpha}{2F}$ (§ 7, 8), dann wie 305.

798. F, $a^2 - c^2$, β', γ' (797)

799. F, a, c, α (797, 247)

800. F, $a^2 - c^2$, b, α (797, 784)

801. F, $a^2 - c^2$, r, α (797, 322)

802. F, $a^2 - c^2$, f, α (801)

803. F, $a^2 - c^2$, r, f (801)

804. F, $a^2 - c^2$, ϵ, α (797, 322)

805. F, $a^2 - c^2$, $f + e$, α (797, 470)

806. F, $a^2 - c^2$, $f - e$, α (797, 471).

807. F, $a^2 - c^2$, $b + d$, α. Aufl. wie 797, dann $b^2 - d^2 = \frac{2F \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ und 247.

808. F, $a^2 - c^2$, $b - d$, α (807)

809. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, α (797, 487).

810. F, $a^2 - c^2 = g^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \frac{4F}{g^2} \sin(\alpha + \beta)$ (§ 3, 2), dann wie 305.

811. F, a, c, $\alpha + \beta$ (810, 247).

812. F, $a^2 - c^2$, b, $\alpha + \beta$ (810, 784).

813. F, $a^2 - c^2$, e, $\alpha + \beta$ (810, 322).

814. F, $a^2 - c^2$, $b + d$, $\alpha + \beta$ (810, 807).

815. F, $a^2 - c^2$, $b - d$, $\alpha + \beta$ (814).

816. F, $a^2 - c^2$, $f + e$, $\alpha + \beta$ (810, 470).

817. F, $a^2 - c^2$, $f - e$, $\alpha + \beta$ (810, 471).

818. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (810, 487).

819. F, $a^2 - c^2 = g^2$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g^2 \cos(\alpha + \beta) + 4F \sin(\alpha + \beta) = g^2 \cos \tau$ (§ 3, 1), dann wie 305.

820. F, a, c, $\alpha - \beta$ (819, 247)

821. F, $a^2 - c^2$, b, $\alpha - \beta$ (819, 784)

822. F, $a^2 - c^2$, r, $\alpha - \beta$ (819, 322)

823. F, $a^2 - c^2$, f, $\alpha - \beta$ (819, 322)

824. F, $a^2 - c^2$, e, $\alpha - \beta$ (823).

825. F, $a^2 - c^2$, $b + d$, $\alpha - \beta$ (819, 807).

826. F, $a^2 - c^2$, $b - d$, $\alpha - \beta$ (825).

827. F, $a^2 - c^2$, $f + e$, $\alpha - \beta$ (819, 470).

828. F, $a^2 - c^2$, $f - e$, $\alpha - \beta$ (819, 471).

829. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (819, 487).

Hosted by Google

830. F, $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\cot\beta = \frac{g^2 - g'^2}{4F}$, $\cot\alpha = \frac{g^2 + g'^2}{4F}$ oder $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \frac{g^2 \sin\beta}{2F}$ (§ 7, 8), dann 305.

831. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α' (830)
832. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, γ' (830)
833. F, a, c, $b^2 - d^2$ (830, 247)
834. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r (830, 322)
835. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f (830, 322)
836. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f + e (830, 470).
837. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f − e (830, 471).
838. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$ (830, 487).

839. F, a, α, β. Aufl. $a^2 - c^2 = \frac{2F \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, dann 247.

840. F, a + c, α, β (839).
841. F, a − c, α, β (839).

m) $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, β', δ' sind voneinander abhängig, so daß sich aus je drei von diesen Stücken stets das vierte berechnen läßt, denn $\frac{a^2 - c^2}{f^2 - e^2} = \frac{\sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')}$, und $\frac{(a^2 - c^2) + (f^2 - e^2)}{(a^2 - c^2) - (f^2 - e^2)} = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\delta'}$. Anstatt β' und δ' können auch $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$ und $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$ gegeben sein. Etwas Ähnliches gilt für $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$, ε, denn $\frac{b^2 - d^2}{f^2 - e^2} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha' + \gamma')}{\sin(\alpha' - \gamma')}$. Anstatt α' und γ' können auch $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ und $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ gegeben sein.

842. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α, ε. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin\varepsilon}{g^2}$, dann wie 305 oder 480.

843. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, ε (842, 309)
844. $a^2 - c^2$, e, f, ε (842, 415).
845. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b + d, ε (842, 291, 293).
846. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b − d, ε (845).
847. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, ε (842, 314).
848. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, F, ε (842, 819).

849. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g^2 \sin\tau}{g'^2}$, dann wie 305.

850. a, c, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (849, 227).
851. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, $\alpha - \beta$ (849, 309).
852. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b + d, $\alpha - \beta$ (849, 293).
853. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b − d, $\alpha - \beta$ (852).
854. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (849, 819).

855. $b^2 - d^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g^2 \sin\sigma}{g'^2}$, dann wie 305.

Hosted by Google

856. b, d, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (855, 227).
857. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, a, $\alpha + \beta$ (855, 309).
858. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $a + c$, $\alpha + \beta$ (855, 293).
859. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $a - c$, $\alpha + \beta$ (858).
860. F, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (854).
861. $a^2 - c^2 = g^2$, f, β', δ'. Aufl. $f^2 - e^2 = \frac{g^2 \sin(\beta' - \delta')}{\sin(\beta' + \delta')}$, dann wie 415.
862. F, $a^2 - c^2$, β', δ' (819, 305).
863. $f^2 - e^2 = g^2$, a, β', δ'. Aufl. $a^2 - c^2 = \frac{g^2 \sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')}$.
864. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', β'. Aufl. $\frac{\sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')} = \frac{g^2}{g'^2}$ (§ 7, 7), dann (305, 480).
865. $f^2 - e^2$, a, c, β' (864, 227).
866. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, r, β' (864, 309, 488).
867. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, β' (866). 868. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, r (866).
869. $a^2 - c^2$, e, f, β' (864, 415).
870. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b + d$, β' (864, 293).
871. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b - d$, β' (870).
872. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b^2 - d^2$, β' (864), dann $\sin(\alpha + \beta) = \frac{(f^2 - e^2)\sin\varepsilon}{b^2 - d^2}$, dann wie 305.
873. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, F, β' (864, 819) 876. F, $a^2 - c^2$, $f - e$, ε (528, 874)
874. F, $a^2 - c^2$, e, f (844) 877. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, ε (527, 874).
875. F, $a^2 - c^2$, $f + e$, ε (527, 874).

n) Unter den gegebenen Stücken befindet sich der Umfang des Sehnenvierecks.

878. $a + b + c + d = u$, r, α, β. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\varepsilon + \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{u}{4r}$ (§ 3, 1).
879. $a+b+c+d$, r, f, β (878). 881. $a + b + c + d$, e, f, α (878).
880. $a+b+c+d$, r, e, f (878). 882. $a + b + c + d$, e, α, β (878).
883. $a + b + c + d = u$, $f + e = s$, α, β. Aufl. $\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} + \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{u}{s}$ (§ 3, 1).
884. $a + b + c + d$, $f - e$, α, β (883).
885. $a + b + c + d$, $f^2 - e^2$, α, β (480, 878).
886. $a + b + c + d = u$, α, β, ε. Aufl.
$$r = \frac{u}{4\left(\sin\frac{1}{2}\varepsilon \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos\frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}.$$

Hosted by Google

887. $a + b + c + d = u$, r, α, ε. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) \sin \frac{1}{2}\beta + \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha) \cos \frac{1}{2}\beta = \frac{u}{4r}$ (§ 3, 1).

888. $a+b+c+d$, r, f, ε (887). 889. $a + b + c + d$, f, α, ε (887).

890. $a + b + c + d = u$, F, α, β. Aufl. Nach der Elimination von r aus den Gleichungen für u und $\sqrt{F}$ erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{u\sqrt{\sin\alpha \sin\beta}}{2\sqrt{F}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon} + \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = 0$ (§ 10).

891. $a + b + c + d = u$, F, α, ε (890).

o) Aufgaben, welche keiner der vorhergehenden Abteilungen untergeordnet werden können.

892. F, α, β, ε. Aufl. $r = \sqrt{\frac{F}{2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon}}$.

893. a, b, c, d. 1. Aufl. Indem man r aus den Ausdrücken für $a + b$ und $c - d$, dann aus denen für $a - b$ und $c + d$ eliminiert, erhält man $\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)} = -\frac{a+b}{c-d}$ und $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)} = \frac{a-b}{c+d}$ (§ 9, 3). Man findet, indem man $a + b + c + d = 2s$ setzt, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}}$. 2. Aufl. Es ist $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$ und $f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$. Setzt man beide Ausdrücke für f^2 einander gleich und entwickelt $\cos\alpha$ aus der Gleichung, so erhält man $\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2ad+2bc}$. Hieraus folgt $1+\cos\alpha = \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2ad+2bc}$ und demnach $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{4(ad+bc)}} = \sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a-b+c+d)}{4(ad+bc)}}$, oder, wenn man $a + b + c + d = 2s$ setzt, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{ad+bc}}$ (I). Ferner ist $1-\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2ad+2bc}$, mithin $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4(ad+bc)}} = \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{4(ad+bc)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$ (II). Aus (I) und (II) folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$. Ferner ist

Hosted by Google

$F = \frac{1}{2}\,ad\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,bc\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,(ad + bc)\,\sin\alpha = (ad + bc)\,\sin\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$.

894. a, c, e, f. Aufl. ähnlich wie 893; $\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')} = \frac{f+e}{a+c'}$, $\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta'+\delta')} = \frac{f-e}{a-c}$.

895. $a + c = s$, $b + d = s'$, $f + e = s''$, r. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{ss'}{2s''r}$, dann wie 276.

896. $a - c = g$, $b - d = g'$, $f - e = g''$, r. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{gg'}{2g''r}$, dann wie 278.

897. $a + c = s$, $b - d = g$, $f + e = s'$, r. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{gs'}{2sr}$, dann wie 460.

898. $a - c = g$, $b + d = s$, $f - e = g'$, r. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g's}{2gr}$. dann wie 462.

899. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, $f^2 - e^2 = g''^2$, r. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{gg'}{2rg''}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{gg''}{2rg'}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'g''}{2rg}$.

900. $b + c + d = s$, a, α, ε. Aufl. Es ist $s - a = (b + d) - (a - c) = 8r\,\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}\varepsilon$. Man findet nach Elimination von r schließlich $\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\alpha'} = \frac{s-a}{4a\,\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\varepsilon}$, $\frac{1}{2}\beta + \alpha' = \frac{1}{2}(\pi + \varepsilon - \alpha)$ (§ 7, 3).

901. $b + c + d = s$, a, α, β. Aufl. ähnlich wie 899. $\frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\alpha'} = \frac{s-a}{4a\,\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\beta}$, $\alpha' - \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta)$ (§ 7, 4).

§ 35.

Aufgaben über das Tangentenviereck.

Die Seiten, ebenso auch Aggregate der Seiten und der Inhalt lassen sich einfach durch ρ und die Winkel α, β, γ, δ ausdrücken. Man findet leicht $a = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = \frac{\rho\,\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\,\sin\frac{1}{2}\beta}$, $b = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma) = \frac{\rho\,\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta\,\sin\frac{1}{2}\gamma}$, $c = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\delta) = \frac{\rho\,\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\,\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho\,\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\,\sin\frac{1}{2}\delta}$, $d = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\delta + \cot\frac{1}{2}\alpha)$

Hosted by Google

$= \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\delta+\alpha)}{\sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\alpha}$, $a + c = \rho\ (\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\gamma + \cot \frac{1}{2}\delta) = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}$, $= \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\beta+\delta) \sin \frac{1}{2}(\delta+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}$, $a - b = d - c = \rho\ (\cot \frac{1}{2}\alpha - \cot \frac{1}{2}\gamma) = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma}$, $b - c = a - d = \rho\ (\cot \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\delta) = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\delta-\beta)}{\sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\beta}$, $F = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\,\rho = (a+c)\,\rho = \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}$. Auch können noch die folgenden Formeln Anwendung finden: $a \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = c \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta$, $b \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = d \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\delta$, $ab \sin \frac{1}{2}\beta^2 = cd \sin \frac{1}{2}\delta^2$, $bc \sin \frac{1}{2}\gamma^2 = ad \sin \frac{1}{2}\alpha^2$, $ac \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta)^2 = bd \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$.

a) Die vier gegebenen Stücke liefern mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$ die nötige Zahl von Gleichungen, um $\rho, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, soweit sie nicht schon gegeben sind, zu berechnen. Die übrigen Stücke findet man dann aus den vorstehenden Gleichungen.

1. $\rho, \alpha, \beta, \gamma$.

2. a, α, β, γ. Aufl. $\rho = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, $b = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}\gamma}$.

3. $a + c = s, \alpha, \beta, \gamma$. Aufl. $a = \frac{s \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta)}$.

4. $a - b = g, \alpha, \beta, \gamma$. Aufl. $\rho = \frac{g \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$,

$$a = \frac{g \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

5. F, α, β, γ. Aufl. $a = \sqrt{\frac{F \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta) \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}}$.

6. a, ρ, α, γ. 1. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\alpha$. 2. Aufl. Man findet b aus $a - b = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha}$, daher auch $d - c$ bekannt. Ferner ergiebt sich $\frac{d}{c} = \frac{b \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{a \sin \frac{1}{2}\alpha^2}$, daher d und c zu finden.

7. a, ρ, β, γ. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\beta$.

8. a, ρ, γ, δ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{a}$ und $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \pi - \frac{1}{2}(\gamma+\delta)$ (§ 6, 1).

Hosted by Google

9. $a + c = s$, ρ, α, β. Aufl. a zu finden, dann wie 8.
10. $a - c$, ρ, α, β. Aufl. wie 9. 11. $a+b$, ρ, α, β. Aufl. wie 9 und 7.
12. $a - b$, ρ, α, β. Aufl. wie 11.
13. $a - b = g$, ρ, β, δ. Aufl. $2\rho \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) - g \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = g \cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)$ (§ 3, 1).
14. $a + b$, ϱ, α, γ. Aufl. $a - b$ zu finden.
15. F, ρ, α, β. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho}$, dann wie 9.
16. a, ρ, $\alpha - \beta = \tau$, δ. Aufl. $a \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a \cos \frac{1}{2}\tau$ (§ 3, 1).
17. a, ρ, $\alpha+\beta = \sigma$, $\gamma + \alpha$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}\sigma}{a}$ (§ 6, 1).
18. a, ρ, $\alpha + \beta$, $\gamma - \alpha$. Aufl. wie 17.
19. a, ρ, $\alpha - \beta$, $\gamma + \alpha$. Aufl. wie 16.
20. a, ρ, $\alpha - \beta$, $\gamma - \alpha$. Aufl. wie 16.
21. a, b, α, β. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\beta$.
22. a, b, α, δ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{a \sin \frac{1}{2}(\alpha+\delta) \sin \frac{1}{2}\alpha}{b}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\gamma = \pi - \frac{1}{2}\delta$ (§ 6, 1).
23. a, b, α, γ. 1. Aufl. $\rho = \frac{(a - b) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}$, $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{b}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\gamma$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha}{b \sin \frac{1}{2}\gamma}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ (§ 7, 2).
24. a, c, α, β. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{a}{c} \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)$ (§ 6, 1).
25. a, c, β, γ. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{c \sin \frac{1}{2}\gamma}{a \sin \frac{1}{2}\beta}$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)$ (§ 7, 1).
26. a, c, α, γ. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{c \sin \frac{1}{2}\gamma}{a \sin \frac{1}{2}\alpha}$, $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma)$ (§ 7, 1).
27. $a - b = g$, $b - c = g'$, α, γ. Aufl. $2g \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{1}{2}(\delta - \beta) - g' \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\delta - \beta) = g' \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ (§ 3, 1).
28. a, b, β, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. $\frac{a - b}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma}$, daher $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{a \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}\beta}{a - b}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\tau$ (§ 6, 2).

Hosted by Google

29. a, c, $\alpha - \beta = \tau$, $\gamma - \delta = \tau'$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - c \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta)}{a + c}$.

30. F, $a + c$, α, β. Aufl. $\rho = \frac{F}{a + c}$, dann wie 9.

31. F, a, α, β. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho} = \frac{F \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{a \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$, dann wie 9 oder 24.

32. a, b, ρ, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{a - b}{\rho}$, $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{b}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\alpha$.

33. a, b, ρ, β. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\beta$, $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\beta$.

34. a, b, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}\sigma}{a}$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\sigma$ (§ 6, 1).

35. a, b, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $a \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2\rho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a \cos \frac{1}{2}\tau$ (§ 3, 1).

36. a, b, ρ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $(a - b) \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) - 2\rho \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (a - b) \cos \frac{1}{2}\sigma$ (§ 3, 1).

37. a, b, ρ, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho \sin \frac{1}{2}\tau}{a - b}$ (§ 6, 2).

38. a, c, ρ, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\alpha$, dann wie 8.

39. a, c, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 34.

40. a, c, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 35.

41. $a - b = g$, $b - c = g'$, ρ, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. wie 37, dann $\cot \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\delta = \frac{g'}{\rho}$, $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma)$ (§ 4, 19).

42. $a - b = g$, $b - c = g'$, ρ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. wie 36, dann $\cot \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\delta = \frac{g'}{\rho}$ (§ 4, 19).

43. $a - b = g$, $b - c = g'$, ρ, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{g}{\rho}$, $\cot \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\delta = \frac{g'}{\rho}$, $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha)$ (§ 4, 19).

44. $a + c = s$, ρ, α, γ. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\delta = \frac{a + c}{\rho} - (\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\gamma)$, $\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\beta = \pi - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ (§ 4, 17).

45. $a - c$, ρ, α, γ. Aufl. ähnlich wie 44.

Hosted by Google

46. F, a, ρ, α. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho}$, dann wie 38.

47. F, a, ρ, γ. Aufl. ähnlich wie 46.

48. F, a, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 46 und 39.

49. F, a, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 46 und 40.

50. F, ρ, α, γ. Aufl. wie 46 und 44.

51. a, b, c, α. Aufl. $d = a + c - b$, $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{ad}{bc}} \sin \frac{1}{2}\alpha$.

52. a, b, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \sqrt{\frac{bd}{ac}} \sin \frac{1}{2}\sigma$, so daß $\beta + \gamma$ und $\gamma - \alpha = (\beta + \gamma) - \sigma$ bekannt ist. Ferner ist $\sqrt{abcd} = \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{2}\sigma \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta}$, folglich $\frac{\sqrt{abcd}}{(a+c)(a-b)} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}$, mithin $\frac{2\sqrt{abcd}}{(a+c)(a-b)} \cdot \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) + \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ (§ 3, 1).

53. a, b, c, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. Ähnlich wie bei 52 findet man $\rho = \frac{\sqrt{abcd} \sin \frac{1}{2}\sigma}{a + c}$, ferner $\cot \frac{1}{2}\alpha - \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{(a+c)(a-b)}{\sqrt{abcd} \sin \frac{1}{2}\sigma}$ (§ 4, 19), $F = \sqrt{abcd} \sin \frac{1}{2}\sigma$.

54. a, b, c, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. ähnlich wie 53.

55. F, a, c, α. Aufl. $\rho = \frac{F}{a + c}$, dann wie 38.

56. F, a, c, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $\frac{F}{\sqrt{abcd}} = \sin \frac{1}{2}\sigma$, daher $\sqrt{bd} = \frac{F}{\sqrt{ac} \sin \frac{1}{2}\sigma}$, $b + d = a + c$ (§ 10).

57. F, a, b, $\gamma + \alpha = \sigma$. Ähnlich wie 56 ist $\sqrt{cd} = \frac{F}{\sqrt{ab} \sin \frac{1}{2}\sigma}$ und $d - c = a - b$ (§ 10).

58. F, a, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\rho = \frac{F}{a + c}$, wie 39.

59. F, a, c, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 58 und 40.

60. a, c, ρ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $F = (a + c)\rho$, dann wie 56.

61. F, a, ρ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho}$, dann wie 56.

62. F, $a + c$, α, γ. Aufl. $\rho = \frac{F}{a + c}$, dann wie 44.

63. a, b, c, ρ. Aufl. ähnlich wie 53, da d bekannt.

Hosted by Google

64. F, a, b, c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{F}{\sqrt{abcd}}$, dann wie 56.

65. F, a, b, ρ. Aufl. $a + c = \frac{F}{\rho}$, dann wie 64.

b) In den folgenden Aufgaben kann man aus dreien der gegebenen Stücke das Dreieck ABC berechnen. Man kennt dann von △ ADC die beiden Stücke e und $d - c = a - b$. Mit Zuhülfenahme des vierten der gegebenen Stücke läßt sich dann △ ADC berechnen. Ist das vierte gegebene Stück c, $c + d$, $d^2 - c^2$, so beachte man § 26. In den übrigen hier angeführten Aufgaben geschieht die Berechnung nach § 14, 53, 54, 71. Ist das vierte gegebene Stück einer der Winkel α oder γ, so muß man erst durch Subtraktion δ″ oder γ″ berechnen. Ähnlich verhält es sich, wenn das vierte gegebene Stück ein Aggregat zweier Winkel ist.

66. a, b, e, α
67. a, b, e, γ″
68. a, b, e, δ
69. a, b, e, $\gamma - \alpha$
70. a, b, e, $\gamma + \alpha$
71. a, b, e, $\delta - \beta$
72. a, b, e, $\alpha + \beta$
73. a, b, e, $\alpha - \beta$
74. a, b, α, β (21)
75. a, b, β, γ″
76. a, b, β, δ
77. a, b, β, $\gamma - \alpha$
78. a, e, β′, γ
79. a, e, β′, γ″
80. a, e, β′, δ′
81. a, e, β′, δ
82. a, e, β′, $\gamma - \alpha$
83. a, e, β′, $\gamma + \alpha$
84. a, e, β′, $\alpha + \beta$
85. a, e, β′, $\alpha - \beta$
86. a, β′, α″, γ″
87. a, α″, β′, δ
88. a, α″, β′, $\gamma - \alpha$
89. e, β′, α″, γ″
90. e, δ, β′, α″
91. e, $\gamma - \alpha$, β′, α″
92. a, b, α″, γ″
93. a, b, α″, α
94 a, b, α″, δ′
95. a, b, α″, δ
96. a, b, $\gamma - \alpha$, α″
97. a, b, $\gamma + \alpha$, α″
98. a, b, $\delta - \beta$, α″
99. a, b, α″, $\alpha + \beta$
100. a, b, α″, $\alpha - \beta$
101. a, e, β, γ″
102. a, e, α, β
103. a, e, β, γ
104. a, e, β, δ′
105. a, e, β, δ
106. a, e, β, $\gamma - \alpha$
107. a, e, α″, γ″
108. a, e, α, α″
109. a, e, α″, δ′
110. a, e, α″, δ
111. a, e, α″, $\gamma - \alpha$
112. a, e, α″, $\gamma + \alpha$
113. a, e, α″, $\delta - \beta$
114. a, e, α″, $\alpha + \beta$
115. a, e, α″, $\alpha - \beta$.

116. a + b, e, β′, γ″ (§ 14, 70)
117. a − b, e, β′, γ″ (§ 14, 71)
118. a + b, e, γ, β′ (§ 14, 70)
119. a − b, e, γ, β′ (§ 14, 71)
120. a + b, e, β′, δ′ (§ 14, 70)
121. a − b, e, β′, δ′ (§ 14, 71)
122. a + b, e, δ, β′ (§ 14, 70)
123. a − b, e, δ, β′ (§ 14, 71)
124. a+b, e, γ−α, β′ (§ 14, 70)
125. a − b, e, γ − α, β′ (§ 14, 71)
126. a + b, e, γ + α, β′ (§ 14, 70)
127. a − b, e, γ + α, β′ (§ 14, 71)
128. a + b, e, δ − β, β′ (§ 14, 70)
129. a − b, e, δ − β, β′ (§ 14, 71)
130. a + b, e, α + β, β′ (§ 14, 70)
131. a − b, e, α + β, β′ (§ 14, 71)
132. a + b, e, α − β, β′ (§ 14, 70)
133. a − b, e, α − β, β′ (§ 14, 71)

Hosted by Google

134. $a + b, c, e, \beta'$ (§ 14, 70)
135. $a - b, c, e, \beta'$ (§ 14, 71)
136. $a + b, d, e, \beta'$ (§ 14, 70)
137. $a - b, d, e, \beta'$ (§ 14, 71)
138. $a+b, c+d, e, \beta'$ (§ 14, 70)
139. $a - b, c+d, e, \beta'$ (§ 14, 71)
140. $a+b, d^2-c^2, e, \beta'$ (§ 14, 70)
141. $a-b, d^2-c^2, e, \beta'$ (§ 14, 71)
142. $a + b, c, e, \beta$ (§ 14, 51)
143. $a - b, c, e, \beta$ (§ 14, 53)
144. $a + b, c + d, e, \beta$ (§ 14, 51)
145. $a+b, d^2-c^2, e, \beta$ (§ 14, 53)
146. $a + b, e, \beta, \gamma''$ (§ 14, 51)
147. $a - b, e, \beta, \gamma''$ (§ 14, 53)
148. $a + b, e, \alpha, \beta$ (§ 14, 51)
149. $a - b, e, \alpha, \beta$ (§ 14, 53)
150. $a + b, e, \beta, \delta$ (§ 14, 51)
151. $a - b, e, \beta, \delta$ (§ 14, 53)
152. $a + b, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§ 14, 51)
153. $a - b, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§ 14, 53)
154. $a + b, c, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 1)
155. $a - b, c, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 2)
156. $a + b, c + d, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 1)
157. $a+b, c^2 - d^2, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 2)
158. $a + b, \beta', \alpha'', \gamma''$ (§ 14, 1)
159. $a - b, \beta', \alpha'', \gamma''$ (§ 14, 2)
160. $a + b, \delta, \beta', \alpha''$ (§ 14, 1)
161. $a - b, \beta', \delta, \alpha''$ (§ 14, 2)
162. $a+b, \gamma-\alpha, \beta', \alpha''$ (§ 14, 1)
163. $a-b, \gamma-\alpha, \beta', \alpha''$ (§ 14, 2)
164. $a, b, c, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
165. $a, b, \gamma'', \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
166. $a, b, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
167. $a, b, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
168. $a, b, \gamma-\alpha, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 78)
169. $a, b, \gamma+\alpha, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
170. $a, b, \alpha+\beta, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
171. $a, b, \alpha - \beta, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 78)
172. $a + b, c, e, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 52)
173. $a - b, c, e, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 54)
174. $a+b, c+d, e, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
175. $a+b, c^2-d^2, e, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 54)
176. $a + b, e, \gamma'', \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
177. $a - b, e, \gamma'', \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 54)
178. $a + b, e, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 52)
179. $a - b, e, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 54)
180. $a + b, e, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 52)
181. $a - b, e, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§ 14, 54)
182. $a+b, e, \gamma - \alpha, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
183. $a-b, e, \gamma-\alpha, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 54)
184. $a+b, e, \gamma+\alpha, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
185. $a-b, e, \gamma+\alpha, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 54)
186. $a+b, e, \alpha+\beta, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
187. $a-b, e, \alpha+\beta, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 54)
188. $a+b, e, \alpha-\beta, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 52)
189. $a-b, e, \alpha-\beta, \alpha''-\beta'$ (§ 14, 54)
190. $a^2 - b^2, c, e, \beta$ (§ 14, 62)
191. $a^2-b^2, d^2-c^2, e, \beta$ (§ 14, 62)
192. $a^2 - b^2, c + d, e, \beta$ (§ 14, 62)
193. $a^2 - b^2, e, \alpha, \beta$ (§ 14, 62)
194. $a^2 - b^2, e, \beta, \gamma''$ (§ 14, 62)
195. $a^2 - b^2, e, \beta, \delta$ (§ 14, 62)
196. $a^2 - b^2, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§ 14, 62)
197. $a^2 - b^2, c, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 12)
198. $a^2-b^2, c^2-d^2, \alpha'', \beta'$ (§ 14, 12)
199. $a^2 - b^2, \alpha'', \gamma'', \beta'$ (§ 14, 12)
200. $a^2 - b^2, \alpha'', \beta', \delta$ (§ 14, 12)
201. $a^2-b^2, \alpha'', \beta', \gamma-\alpha$ (§ 14, 12)
202. $a^2-b^2, \alpha'', \beta', \gamma+\alpha$ (§ 14, 12).

c) Kann man aus dreien der gegebenen Stücke $\triangle$ ABC berechnen, und ist das vierte gegebene Stück der Inhalt F des Tangentenvierecks, so berechne man zunächst den Inhalt von $\triangle$ ABC, wodurch auch der Inhalt von $\triangle$ ADC bekannt wird. Man kann daher $\triangle$ ADC aus $e, d - c = a - b$ und dem Inhalt berechnen (§ 14, 453). Außer F ist gegeben:

Hosted by Google

203. a, b, e
204. a, b, β
205. a, e, β′
206. a, β′ α″
207. e, β′, α″
208. a, b, α″
209. a, e, β
210. a, e, α″
211. a + b, e, β′ (§ 14, 70)
212. a — b, e, β′ (§ 14, 71)
213. a + b, e, β (§ 14, 51)
214. a — b, e, β (§ 14, 53)
215. a + b, α″, β′ (§ 14, 1)
216. a — b, α″, β′ (§ 14, 2)
217. a, b, α″ — β′ (§ 14, 78)
218. a + b, e, α″ — β′ (§ 14, 52)
219. a — b, e, α″ — β′ (§ 14, 54)
220. $a^2 - b^2$, e, β (§ 14, 62)
221. $a^2 - b^2$, α″, β′ (§ 14, 12).

d) Kann man aus dreien der gegebenen Stücke △ ABC berechnen und ist das vierte ρ, so ist die Aufgabe auf 33 zurückgeführt. Außer ρ ist gegeben:

222. a, b, e
223. a, b, β
224. a, e, β′
225. a, β′, α″
226. e, β′, α″
227. a, b, α″
228. a, e, β
229. a, e, α″
230. a + b, e, β′ (§ 14, 70)
231. a — b, e, β′ (§ 14, 71)
232. a + b, e, β (§ 14, 51)
233. a — b, e, β (§ 14, 53)
234. a + b, e, α″ — β′ (§ 14, 52)
235. a — b, e, α″ — β′ (§ 14, 54)
236. a, b, α″ — β′ (§ 14, 78)
237. a + b, α″, β′ (§ 14, 1)
238. a — b, α″, β′ (§ 14, 2)
239. $a^2 - b^2$, e, β (§ 14, 62)
240. $a^2 - b^2$, α″, β′ (§ 14, 12).

e) Die Gestalt des Tangentenvierecks ist durch drei Winkel bestimmt, so daß, wenn drei beliebige Winkel desselben gegeben sind, die anderen aus ihnen berechnet werden können. Doch nur in wenigen Fällen ist diese Berechnung einfach. Es dienen zu derselben zwei Gleichungen zwischen den 8 Winkeln α′, α″, β′, β″, γ′, γ″, δ′, δ″. Aus $a = \frac{e \sin \alpha''}{\sin \beta}$ und $b = \frac{e \sin \beta'}{\sin \beta}$ folgt $a - b = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta')}$, und ebenso erhält man $d - c = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \gamma'')}$. Da nun $a - b = d - c$ ist, so folgt hieraus $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \gamma'')}$ (I). Indem man dasselbe Verfahren auf die Dreiecke DBC und DBA anwendet, erhält man $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'' + \gamma')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \delta'')}$ (II). Indem man in beiden Gleichungen auf jeder Seite 1 addiert und subtrahiert und das

Hosted by Google

so Erhaltene dividiert, erhält man noch $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma''}$ (III) und $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta''}$ (IV).

1. Gegeben sei α'', β', γ''. Man findet δ' aus (III). Ferner folgt aus (IV) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\gamma'')}$, und da $\frac{1}{2}(\beta''-\gamma') + \frac{1}{2}(\alpha'-\delta'') = \frac{1}{2}(\alpha''+\beta'-\gamma''-\delta')$ ist, kann man nach § 7, 1 $\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')$ und $\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')$ berechnen, somit auch α', δ'', β'', γ', da $\frac{1}{2}(\alpha'+\delta'')$ und $\frac{1}{2}(\beta''+\gamma')$ bekannt ist. Die Aufgabe ist somit immer auf eine der früheren Abschnitte zurückgeführt. Außer α'', β', γ'' ist gegeben:

241. c (2, 86, 87) 246. c^2-d^2 (199,200) 251. a—d (4, 159,161)
242. d (2, 86, 87) 247. a + c (3) 252. b + c (158, 160)
243. f (89, 90) 248. F (5) 253. a^2-d^2 (199, 200)
244. c + d (158, 160) 249. ρ (1) 254. b^2-c^2 (199, 200)
245. c—d (4,159,161) 250. a+d (158,160)

2. Gegeben sei α'', β', δ. Aus (I) findet man $\sin\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'') = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta\,\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}$, wodurch δ' und γ'' gefunden werden. Die Berechnung der übrigen Winkel geschieht wie in 1). Außer α'', β', δ ist gegeben:

255. c (2, 86, 87) 260. a + c (3) 264. b + c (158, 160)
256. f (89, 90) 261. ρ (1) 265. a^2-d^2 (199, 200)
257. c+d (158, 160) 262. a+d (158, 160) 266. b^2-c^2 (199, 200)
258. c—d (4,159,161) 263. a—d (4,159,161) 267. F (5).
259. c^2-d^2 (199, 200)

3. Gegeben sei α'', β', $\delta'-\gamma''$. Aus (I) erhält man $\sin\frac{1}{2}(\delta'+\gamma'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'')\,\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}$, wodurch δ' und γ'' gefunden sind. Alles übrige wie in 1). Außer α'', β', $\delta'-\gamma''$ ist gegeben:

268. c (2, 86, 87) 273. a + c (3) 277. a^2-d^2 (199, 200)
269. f (89, 90) 274. a+d (158, 160) 278. b^2-c^2 (199, 200)
270. c+d (158, 160) 275. a—d (4,159,161) 279. ρ (1)
271. c—d (4,159,161) 276. b + c (158, 160) 280. F (5).
272. c^2-d^2 (199,200)

4. Gegeben sei α, δ', α''. Aus (III) folgt $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha''}$, und da $\frac{1}{2}\gamma'' + \frac{1}{2}\beta' = \frac{1}{2}\alpha$, so findet man γ'' und β' nach § 6, 9. Alles übrige wie in 1). Außer α, δ', α'' ist gegeben:

281. a (2, 86, 87) 282. b (2, 86, 87) 283. e (89, 90)

Hosted by Google

284. f (89, 90) 288. a—d (4, 159, 161) 292. a^2-d^2 (199, 200)
285. a+b (158, 160) 289. b+c (158, 160) 293. b^2-c^2 (199, 200)
286. a—b (4, 159, 161) 290. a+c (3) 294. ρ (1)
287. a+d (158, 160) 291. a^2-b^2 (199, 200) 295. F (5).

5. Gegeben sei $\delta', \alpha'', \beta'-\gamma''$. Aus (III) folgt $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma''}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'}$, daher β' und γ'' nach § 6, 10 zu finden. Alles übrige wie in 1). Außer $\delta', \alpha'', \beta'-\gamma''$ ist gegeben:

296. a (2, 86, 87) 301. a—b (4, 159, 161) 306. a^2-b^2 (199, 200)
297. b (2, 86, 87) 302. a+d (158, 160) 307. a^2-d^2 (199, 200)
298. e (89, 90) 303. a—d (4, 159, 161) 308. b^2-c^2 (199, 200)
299. f (89, 90) 304. b+c (158, 160) 309. ρ (1)
300. a+b (158, 160) 305. a+c (3) 310. F (5).

6. Gegeben ist $\alpha+\beta, \beta', \delta'$. Es ist $\alpha+\beta=\gamma''+\beta'+\delta''+\gamma'=\gamma''+\pi-\alpha''=\pi-(\alpha''-\gamma'')$, also $\alpha''-\gamma''=\pi-(\alpha+\beta)$. Ferner ist nach (III) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha''\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma''=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'$, also α'' und γ'' nach § 6, 8 zu finden. Die Berechnung der übrigen Winkel geschieht wie in 1). Außer $\alpha+\beta, \beta', \delta'$ ist gegeben:

311. a (2, 86, 87) 316. a—b (4, 159, 161) 320. a^2-b^2 (199, 200)
312. b (2, 86, 87) 317. a+d (158, 160) 321. a^2-d^2 (199, 200)
313. e (89, 90) 318. a—d (4, 159, 161) 322. ρ (1)
314. f (89, 90) 319. a+c (3) 323. F (5).
315. a+b (158, 160)

7. Gegeben ist α, β, γ. Zunächst findet man δ; dann folgt aus (I) und (II) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'')}=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, und da $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')+\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'')=\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, und $\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')+\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')=\frac{1}{2}(\delta-\beta)$ ist, so findet man nach § 7, 1 die Differenzen $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')$, $\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'')$, $\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')$, $\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')$, und da die entsprechenden Summen bekannt sind, sämtliche Winkel selbst. Außer α, β, γ ist gegeben:

324. e (89, 90) 325. a+b (158, 160) 326. a^2-b^2 (199, 200).

8. Gegeben ist $\alpha, \gamma, \varepsilon$. Aus (I) und (II) erhält man die Gleichungen $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\gamma'')}=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\delta}$ (V) und $\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$ (VI). Aus der letzteren folgt $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')+\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\delta'')-\sin\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos\frac{1}{2}\gamma}$ oder $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\delta-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha'-\beta''+\gamma'-\delta'')}=\cot\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cot\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha'-\beta''+\gamma'-\delta'')=\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\delta-\beta)$ (VII). Auf dieselbe Weise leitet man aus (V) mit Berücksichtigung, daß

Hosted by Google

$\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\delta+\beta)=\operatorname{cot}\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)$ ist, die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha''-\beta'+\gamma''-\delta')=\operatorname{cot}\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\delta-\beta)$ (VIII) her. Durch Division von (VII) und (VIII) ergiebt sich endlich $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha'-\beta''+\gamma'-\delta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha''-\beta'+\gamma''-\delta')}=\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)^2$ (IX), und da $\frac{1}{4}(\alpha'-\beta''+\gamma'-\delta'')+\frac{1}{4}(\alpha''-\beta'+\gamma''-\delta')=\varepsilon-\frac{1}{2}\pi$ ist, findet man $\frac{1}{4}(\alpha'-\beta''+\gamma'-\delta'')$ und $\frac{1}{4}(\alpha''-\beta'+\gamma''-\delta')$ nach § 6, 9. Aus (VII) oder (VIII) findet man dann $\delta-\beta$, mithin auch δ und β, da $\delta+\beta=2\pi-\gamma-\alpha$ ist. Nun ist $\alpha''-\beta'+\delta'-\gamma''=\gamma-\alpha$ und $\alpha''-\beta'-(\delta'-\gamma'')$ aus (IX) berechnet, also findet man $\alpha''-\beta'$ und $\delta'-\gamma''$, und da ferner $\alpha''+\beta'=\pi-\beta$, $\delta'+\gamma''=\pi-\delta$ bekannt ist, findet man α'', β', γ'', δ'. Ganz auf dieselbe Weise findet man die vier Winkel α', β'', γ', δ''. Statt (IX) kann man auch die auf dieselbe Weise herzuleitende Gleichung $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\delta'+\beta'-\delta''-\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha''+\gamma''-\alpha'-\gamma')}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2$ in Verbindung mit $\frac{1}{4}(\delta'+\beta'-\delta''-\beta'')+\frac{1}{4}(\alpha''+\gamma''-\alpha'-\gamma')=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\pi)$ benutzen. Außer α, γ, ε ist gegeben:

327. a (2, 86, 87) 331. a − b (4, 159, 161) 335. a^2-b^2 (199, 200)
328. e (89, 90) 332. a + d (158, 160) 336. a^2-d^2 (199, 200)
329. f (89, 90) 333. a − d (4, 159, 161) 337. ρ (1)
330. a + b (158, 160) 334. a + c (3) 338. F (5).

f) In den folgenden Aufgaben suche man die Winkel α und β wie in den Aufgaben 7, 16, 17. Die Aufgaben werden dann auf 249 zurückgeführt.

339. a, ρ, β, γ''
340. a, ρ, β, α'
341. a, ρ, γ', δ''
342. a, ρ, $\beta'-\gamma''$, β
343. a, ρ, α', γ' ($\alpha+\beta$ bekannt)
344. a, ρ, $\alpha+\beta$, β'
345. a, ρ, $\alpha+\beta$, $\delta''-\gamma'$
346. a, ρ, $\alpha-\beta$, β'
347. a, ρ, $\alpha-\beta$, γ'
348. a, ρ, $\alpha-\beta$, α'
349. a, ρ, $\alpha-\beta$, $\delta''-\gamma'$.

g) Die folgenden Aufgaben lassen sich in ähnlicher Weise auf 102 zurückführen.

350. a, e, ρ, $\alpha+\beta$ 351. a, e, ρ, $\alpha-\beta$ 352. ρ, e, α, β.

h) In den folgenden Aufgaben berechne man die Winkel α und γ wie in 32, 36, 37. Die Aufgaben werden dadurch auf 261, 294 oder 337 zurückgeführt.

353. a − b, ρ, β', γ''
354. a − b, ρ, α, α''
355. a − b, ρ, α, γ'
356. a − b, ρ, α, $\alpha''-\delta'$
357. a − b, ρ, α, $\beta''-\gamma'$
358. a − b, ρ, α, ε
359. a − b, ρ, $\gamma+\alpha$, β'
360. a − b, ρ, $\gamma+\alpha$, γ'
361. a − b, ρ, $\gamma+\alpha$, $\beta'-\gamma''$
362. a − b, ρ, $\gamma+\alpha$, $\beta''-\gamma'$

Hosted by Google

363. $a - b$, ρ, $\gamma + \alpha$, ε
364. $a - b$, ρ, $\gamma - \alpha$, β'
365. $a - b$, ρ, $\gamma - \alpha$, γ'
366. $a - b$, ρ, $\gamma - \alpha$, $\beta' - \gamma''$
367. $a - b$, ρ, $\gamma - \alpha$, $\beta'' - \gamma'$
368. $a - b$, ρ, $\gamma - \alpha$, ε.

i) Auf ähnliche Weise lassen sich die folgenden Aufgaben auf die erste derselben, nämlich auf 369 zurückführen.

369. e, ρ, α, γ. Aufl. Bezeichnet man den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit O, so ist $OA = \frac{\rho}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$, $OC = \frac{\rho}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$. Man kennt daher die drei Seiten des Dreiecks AOC und kann den Winkel CAO berechnen, und mit Hülfe desselben β' und γ''. Die Aufgabe ist dann zurückgeführt auf 283 oder 294.

370. $a - b$, e, α, γ. Aufl. ρ zu finden.

371. $a - b$, e, ρ, α 372. $a - b$, e, ρ, $\gamma + \alpha$ 373. $a - b$, e, ρ, $\gamma - \alpha$.

§ 36.

Aufgaben über das Trapez.

a) In den folgenden Aufgaben dienen zur Berechnung von $\triangle$ ABC folgende Stücke:

1. a, β', α''
2. e, β', α''
3. b, β', α''
4. a, b, α''
5. a, b, β'
6. a, e, α''
7. a, e, β
8. b, e, β
9. a, b, β
10. b, e, α''
11. a, b, e
12. b, h, α''
13. e, h, β
14. a, h, β
15. $a + b$, h, β' (§ 14, 99)
16. $a - b$, h, β' (§ 14, 129)
17. $a + b$, e, h (§ 14, 293)
18. $a - b$, e, h (§ 14, 294)
19. a, h, α'' (§ 14, 65).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) c
β) d
γ) α
δ) γ''
ε) $c + d$ (§ 14, 70)
ζ) $c - d$ (§ 14, 71)
η) $c^2 - d^2$ (§ 14, 74)
ϑ) F (§ 14, 59)
ι) f
$\varkappa$) γ'
λ) β''
μ) ε
ν) α'.

In den Fällen α) bis ϑ) ist $\triangle$ ACD zu berechnen; in ι) bis μ) sind $\triangle$ BCD und $\triangle$ ADC zu berechnen; in ν) $\triangle$ ABD und $\triangle$ ADC.

Diejenigen Aufgaben, in denen nur die vier Haupfälle in Anwendung kommen, sind bereits § 24 angeführt.

b) Zieht man durch C eine Parallele zu AD, welche AB in F trifft, so ist $CF = d$, $FB = a - c$, $\angle CFB = \alpha$, $\angle FCB = \pi - (\alpha + \beta)$.

Zur Berechnung von $\triangle$ FBC können folgende Stücke gegeben sein:

1. b, α, β
2. $a - c$, α, β
3. b, d, α
4. $a - c$, b, α
5. $a - c$, b, $\alpha + \beta$
6. b, d, $\alpha + \beta$

Hosted by Google

7. b, d, $\alpha - \beta$ (§ 14, 78)
8. a – c, b, β
9. a – c, b, d
10. b + d, α, β (§ 14, 1)
11. b – d, α, β (§ 14, 2)
12. a – c, b + d, α (§ 14, 70)
13. a – c, b – d, α (§ 14, 71)
14. a – c, b + d, $\alpha + \beta$ (§ 14, 51)
15. a – c, b – d, $\alpha + \beta$ (§ 14, 53)
16. a – c, b + d, $\alpha - \beta$ (§ 14, 52)
17. a – c, b – d, $\alpha - \beta$ (§ 14, 54)
18. $b^2 - d^2$, α, β (§ 14, 12)
19. $b^2 - d^2$, a – c, $\alpha + \beta$ (§ 14, 62)
20. $b^2 - d^2$, a – c, $\alpha - \beta$ (§ 14, 63)
21. h, α, β
22. b, h, α
23. b, d, h
24. a – c, h, $\alpha + \beta$ (§ 14, 65)
25. a – c, h, $\alpha - \beta$ (§ 14, 66)
26. b + d, h, $\alpha + \beta$ (§ 14, 105)
27. b – d, h, $\alpha + \beta$ (§ 14, 137)
28. b + d, h, $\alpha - \beta$ (§ 14, 106)
29. b – d, h, $\alpha - \beta$ (§ 14, 138)
30. b + d + a – c, α, β (§ 14, 3)
31. b + d + a – c, h, $\alpha + \beta$ (§ 14, 148)
32. b + d + a – c, h, $\alpha - \beta$ (§ 14, 149)
33. a – c, b + d, h (§ 14, 450)
34. a – c, b – d, h (§ 14, 452).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) α'' γ) β' ε) c η) e ι) γ' λ) F.
β) γ'' δ) a ζ) a + c ϑ) α' κ) β''

In den Fällen α) bis η) findet man die gesuchten Stücke durch Berechnung von △ ABC oder ADC. In den Fällen ϑ) bis κ) ist △ BCD zu berechnen. Ist endlich F gegeben, so kann man h aus △ FBC berechnen und findet dann $a + c = \frac{2F}{h}$. Die fehlenden Stücke lassen sich dann aus △ ABC oder △ ADC berechnen. Für die Aufgaben, in denen α' und γ' gegeben ist, beachte man, daß $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ ist.

a) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter b) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den aus Kombination von 1) bis 34) und α) bis λ) gebildeten Aufgaben.

1. a, c, α, β
2. a, b, c, α
3. a, b, c, $\alpha + \beta$
4. a, b, c, d
5. b + d, a, c, α
6. b – d, a, c, α
7. a – c, b + d, β', γ''
8. a – c, b – d, β', γ''
9. a, c, b + d, $\alpha + \beta$
10. a, c, b – d, $\alpha + \beta$
11. a, c, b + d, $\alpha - \beta$
12. a, c, b – d, $\alpha - \beta$
13. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha + \beta$
14. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha - \beta$
15. a, c, h, $\alpha + \beta$
16. F, h, α, β
17. F, a + c, α, β
18. F, a + c, b, α
19. F, a, h, $\alpha + \beta$
20. F, a, c, $\alpha + \beta$
21. a, c, h, $\alpha - \beta$
22. F, a, h, $\alpha - \beta$
23. F, a, c, $\alpha - \beta$
24. b + d, a + c, F, $\alpha + \beta$
25. b – d, a + c, F, $\alpha + \beta$
26. b + d, a + c, F, $\alpha - \beta$
27. b – d, a + c, F, $\alpha - \beta$
28. b + d + a – c, α'', β', γ''
29. a – c, b + d, α', γ'
30. a – c, b – d, α', γ'
31. a – c, $b^2 - d^2$, α', γ'
32. a, c, b + d, h
33. a, c, b – d, h.

d) Zieht man durch C zu BD eine Parallele, die die Verlängerung von AB in G trifft, so ist BG = c, AG = a + c, CG = f,

Hosted by Google

$\angle$ CGB $= \beta''$, $\angle$ ACG $= \varepsilon$. Da $\triangle$ CBG $=$ ADC ist, so ist der Inhalt von $\triangle$ AGC $=$ F. Zur Berechnung von $\triangle$ AGC können folgende Stücke gegeben sein:

1. a + c, β', β''
2. e, β', β''
3. e, f, β'
4. a + c, e, β''
5. a + c, e, ε
6. e, f, ε
7. a + c, e, β'
8. a + c, e, f
9. a + c, h, β'
10. f + e, β', β'' (§ 14, 1)
11. f − e, β', β'' (§ 14, 2)
12. a + c, f + e, ε (§ 14, 51)
13. a + c, f − e, ε (§ 14, 53)
14. a + c, f + e, β' (§ 14, 70)
15. a + c, f − e, β' (§ 14, 71)
16. a + c, f + e, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 52)
17. a + c, f − e, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 54)
18. e, f, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 78)
19. $f^2 - e^2$, β', β'' (§ 14, 12)
20. $f^2 - e^2$, a + c, ε (§ 14, 62)
21. $f^2 - e^2$, a + c, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 63)
22. e, h, ε
23. e, f, h
24. e, h, β''
25. a + c, e, h
26. a + c, h, ε (§ 14, 65)
27. a + c, h, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 66)
28. a + c, f + e, h (§ 14, 450)
29. a + c, f − e, h (§ 14, 452)
30. f + e, h, ε (§ 14, 105)
31. f − e, h, ε (§ 14, 137)
32. f + e, h, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 106)
33. f − e, h, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 138)
34. F, β', β'' (§ 14, 10)
35. F, a + c, ε (§ 14, 68)
36. F, h, ε (§ 14, 182)
37. F, f, β' (§ 14, 68)
38. F, e, f
39. F, a + c, β'
40. F, e, β'
41. F, h, β'
42. F, a + c, e
43. F, e, h
44. F, h, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 191)
45. F, a + c, $\beta' - \beta''$ (§ 14, 69)
46. F, e, ε
47. F, f + e, ε (§ 14, 92)
48. F, f − e, ε (§ 14, 120).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) a	δ) b	η) γ'	$\varkappa$) d	μ) α'	ξ) c + d
β) c	ε) β	ϑ) a + b	λ) α	ν) γ''	o) c − d.
γ) a − c	ζ) α''	ι) a − b			

In den Fällen α) bis ι) kann man nach der Berechnung von $\triangle$ AGC zunächst $\triangle$ ABC berechnen (in den beiden letzten Fällen nach § 14, 70, 71), und dann ADC nach dem dritten Hauptfalle. In den Fällen $\varkappa$) bis o) läßt sich nach Berechnung von $\triangle$ AGC zunächst $\triangle$ ADC (in den beiden letzten Fällen nach § 14, 70, 71), dann $\triangle$ ABC berechnen.

e) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter d) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den aus Kombination von 1) bis 48) und α) bis o) gebildeten Aufgaben.

34. a, c, e, β''
35. a, c, e, ε
36. a + c, e, α', γ''
37. e, f, α', γ''
38. a, c, e, f
39. a, c, f + e, ε

Hosted by Google

40. a, c, f − e, ε
41. a + c, f + e, α', γ''
42. a + c, f − e, α', γ''
43. a, c, f + e, β'
44. a, c, f − e, β'
45. a, c, f + e, $\beta' - \beta''$
46. a, c, f − e, $\beta' - \beta''$
47. $f^2 - e^2$, a, c, ε
48. $f^2 - e^2$, a + c, α', γ''
49. $f^2 - e^2$, a, c, $\beta' - \beta''$
50. e, h, α', γ''
51. a, c, h, ε
52. a + c, h, α' γ''
53. a, c, h, $\beta' - \beta''$
54. a, c, f + e, h
55. a, c, f − e, h
56. f + e, h, α', γ''
57. f − e, h, α', γ''
58. F, a, c, ε
59. F, a + c, α', γ''
60. F, h, α', γ''
61. F, a, c, β'
62. F, a, c, e
63. F, a, c, $\beta' - \beta''$
64. F, e, α', γ''
65. F, f + e, α', γ''
66. F, f − e, α', γ''.

f) In den folgenden Aufgaben läßt sich h leicht berechnen und dieselben sind dann auf Aufgaben unter der Gruppe d) zurückgeführt.

67. a + c, b, β, ε
68. a + c, b, β, $\beta' - \beta''$
69. a + c, f + e, b, β
70. a − c, f − e, b, β
71. f + e, b, β, ε
72. f − e, b, β, ε
73. f + e, b, β, $\beta' - \beta''$
74. f − e, b, β, $\beta' - \beta''$.
75. F, b, β, ε
76. F, b, β, $\beta' - \beta''$.

g) Die Gestalt des Trapezes ist durch drei Winkel bestimmt, so daß sich aus drei beliebigen voneinander unabhängigen Winkeln des Trapezes sämtliche übrigen berechnen lassen müssen. Einige Fälle, in denen die Berechnung sich einfach gestaltet, mögen hier angeführt werden. Aus den mittelst des Sinussatzes sich leicht ergebenden Gleichungen $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$, $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$, $\frac{c}{d} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\beta'}$, $\frac{d}{a} = \frac{\sin\beta''}{\sin\alpha'}$ folgt durch Multiplikation $\sin\alpha' \sin\gamma' \sin\beta'^2 = \sin\alpha'' \sin\gamma'' \sin\beta''^2$ (I). Setzt man in diese Gleichung für α', α'', γ', γ'' ihre Werte $\alpha' = \pi - (\alpha + \beta'')$, $\alpha'' = \pi - (\beta + \beta')$, $\gamma' = \beta - \beta''$, $\gamma'' = \alpha - \beta'$ ein, so erhält man nach einigen Transformationen $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta'$ (II). Einfacher ergiebt sich dieselbe Gleichung direkt auf folgende Weise. Fällt man auf AB die Senkrechte CM, so ist $AM = h \cot\beta'$, $MB = h \cot\beta$, daher $a = AM + MB = h(\cot\beta' + \cot\beta)$. Aus dem Dreieck ABD ergiebt sich ebenso $a = h(\cot\beta'' + \cot\alpha)$. Aus beiden Gleichungen folgt $\cot\beta' + \cot\beta = \cot\beta'' + \cot\alpha$ oder $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta'$ (II). Durch Multiplikation von $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$, $\frac{b}{f} = \frac{\sin\beta''}{\sin\beta}$, $\frac{f}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''}$ erhält man $\sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta'' = \sin\beta \sin\alpha' \sin\beta'$ (III), ebenso leitet man $\sin\alpha \sin\beta' \sin\gamma' = \sin\beta \sin\beta'' \sin\gamma''$ (IV) her. Beide Gleichungen lassen sich auch aus (I) herleiten. Durch Multiplikation von (III) und (IV) erhält man $\sin\alpha^2 \sin\alpha'' \sin\gamma' = \sin\beta^2 \sin\alpha' \sin\gamma''$ (V).

1. Gegeben sei β', β'', γ'. 1. Aufl. Zunächst findet man α''. Aus (I) folgt $\frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\gamma' \sin\beta'^2}{\sin\alpha'' \sin\beta''^2}$, und da $\gamma'' + \alpha' = \alpha'' + \gamma'$

Hosted by Google

ist, kann man γ'' und α' nach § 7, 1 berechnen. 2. Aufl. Aus (IV) folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma''} = \frac{\sin\beta\,\sin\beta''}{\sin\beta'\,\sin\gamma'}$, und da $\alpha - \gamma'' = \beta'$ ist, kann man α und γ'' nach § 7, 2 berechnen. Die Aufgaben sind dadurch, wie in den folgenden Fällen, auf Aufgaben früherer Gruppen zurückgeführt. Außer β', β'' und γ' ist gegeben:

77. d 79. b + d 81. c + d 83. $b^2 - d^2$
78. a − c 80. b − d 82. c − d 84. $c^2 - d^2$.

2. Gegeben sei α', α'', γ'. 1. Aufl. Zunächst findet man γ''. Nach (I) ist dann $\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''} = \sqrt{\frac{\sin\alpha''\sin\gamma''}{\sin\alpha'\sin\gamma'}}$ und $\beta' + \beta'' = \pi - (\alpha'' + \gamma')$ (§ 7, 1). 2. Aufl. Aus (V) folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\sin\alpha'\sin\gamma''}{\sin\alpha''\sin\gamma'}}$, und ferner ist $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§ 7, 1). Außer α', α'', γ' ist gegeben:

85. a 89. F 93. a − c 97. f − e
86. b 90. a + b 94. b + d 98. $a^2 - b^2$
87. e 91. a − b 95. b − d 99. $b^2 - d^2$
88. h 92. a + c 96. f + e 100. $f^2 - e^2$.

3. Gegeben ist β', α'', γ''. 1. Aufl. Zunächst findet man $\alpha = \beta' + \gamma''$ und $\beta = \pi - (\beta' + \alpha'')$. Dann ergiebt sich β'' nach (II) aus der Gleichung $\cot\beta'' = \cot\beta' + \cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta + \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha\,\sin\beta'}$. 2. Aufl. Nachdem α und β gefunden sind, ergiebt (IV) $\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'} = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta'}{\sin\beta\,\sin\gamma''}$, wobei $\beta'' + \gamma' = \beta$ ist (§ 7, 1). Außer β', α'', γ'' ist gegeben:

101. f 103. f + e 105. $f^2 - e^2$ 106. F.
102. a + c 104. f − e

4. Gegeben ist α, β, ε. Nach (II) ist $\cot\beta'' - \cot\beta' = \cot\beta - \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}$ und $\beta'' + \beta' = \pi - \varepsilon$ (§ 4, 19). Außer α, β, ε ist gegeben:

107. a 111. a + b 115. b + d 119. F
108. b 112. a − b 116. b − d 120. $a^2 - b^2$
109. e 113. a + c 117. f + e 121. $b^2 - d^2$
110. h 114. a − c 118. f − e 122. $f^2 - e^2$.

5. Gegeben sei α, β, $\beta' - \beta''$. Man findet β' und β'' ähnlich wie in 4) nach § 4, 20. Außer α, β, $\beta' - \beta''$ ist gegeben:

123. a 124. b 125. e 126. h

Hosted by Google

127. $a + b$	130. $a - c$	133. $f + e$	136. $a^2 - b^2$
128. $a - b$	131. $b + d$	134. $f - e$	137. $b^2 - d^2$
129. $a + c$	132. $b - d$	135. F	138. $f^2 - e^2$.

6. Gegeben ist β', β'', $\alpha + \beta$. Nach (II) ist $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta' = \frac{\sin(\beta' - \beta'')}{\sin\beta' \sin\beta''}$ (§ 4, 19). Außer β', β'', $\alpha + \beta$ ist gegeben:

139. a	143. $a - b$	147. $b - d$	151. $a^2 - b^2$
140. b	144. $a + c$	148. $f + e$	152. $b^2 - d^2$
141. e	145. $a - c$	149. $f - e$	153. $f^2 - e^2$.
142. $a + b$	146. $b + d$	150. F	

7. Gegeben sei β', β'', $\alpha - \beta$. Ähnlich wie in 6) sind α und β nach § 4, 20 zu berechnen. Außer β', β'', $\alpha - \beta$ ist gegeben:

154. a	158. $a - b$	162. $b - d$	166. $a^2 - b^2$
155. b	159. $a + c$	163. $f + e$	167. $b^2 - d^2$
156. e	160. $a - c$	164. $f - e$	168. $f^2 - e^2$.
157 $a + b$	161. $b + d$	165. F	

8. Gegeben sei α', α'', β'. 1. Aufl. Zunächst findet man β. Dann ist nach (II) $\cot\alpha + \cot\beta'' = \cot\beta + \cot\beta' = \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin\beta \sin\beta'}$, und $\alpha + \beta'' = \pi - \alpha''$ (§ 4, 17). 2. Aufl. Aus (III) folgt $\sin\alpha \sin\beta'' = \frac{\sin\beta \sin\alpha' \sin\beta'}{\sin\alpha''}$, wobei $\alpha + \beta'' = \pi - \alpha'$ ist (§ 6, 1). Außer α', α'', β' ist gegeben:

169. c	174. $a + b$	179. $b - d$	183. $a^2 - b^2$
170. d	175. $a - b$	180. $f + e$	184. $c^2 - d^2$
171. f	176. $c + d$	181. $f - e$	185. $b^2 - d^2$
172. $a + c$	177. $c - d$	182. F	186. $f^2 - e^2$.
173. $a - c$	178. $b + d$		

h) In den Aufgaben 187 bis 213 sind je drei unter b) 1 bis 34 angeführte Stücke, welche zur Berechnung von $\triangle$ FBC dienen, (allerdings mit Ausschluß von 1, 2, 10, 11, 18, 21, 30) gegeben. Als viertes gegebenes Stück tritt ε hinzu. Die Aufgaben sind nach Berechnung von α und β auf die unter g), 4) zurückgeführt.

i) In den Aufgaben 214 bis 297 sind je drei unter d) 1 bis 48 angeführte Stücke, welche zur Berechnung des Dreiecks AGC dienen (mit Ausschluß von 1, 2, 10, 11, 19, 34), gegeben. Als viertes gegebenes Stück tritt $\alpha + \beta$ oder $\alpha - \beta$ hinzu. Nach Berechnung von β' und β'' sind die Aufgaben auf die unter g), 6) und 7) zurückgeführt.

Hosted by Google

k) In den folgenden Aufgaben kommt die unter b) gegebene Konstruktion in Anwendung. Drei der gegebenen Stücke bestimmen Dreieck FBC, das vierte ist $f + e$ oder $f - e$. Die Aufgaben entstehen durch Kombination von $f + e$ oder $f - e$ mit den unter b) 1 bis 34 aufgeführten. Nur zwei Aufgaben mögen mit einer Auflösung versehen werden, da sämtliche andere sich auf dieselben zurückführen oder sich auch in ähnlicher Weise direkt berechnen lassen.

298. $f + e = s$, h, α, β. Aufl. Da $f = \frac{h}{\sin \beta''}$, $e = \frac{h}{\sin \beta'}$, so ist $s = \frac{h (\sin \beta' + \sin \beta'')}{\sin \beta' \sin \beta''}$. Ferner ist nach g) (II) $\frac{\sin (\beta' - \beta'')}{\sin \beta' \sin \beta''} = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$. Durch Division beider Gleichungen erhält man $\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta' + \beta'')}{\sin \frac{1}{2} (\beta' - \beta'')} = \frac{s \sin \alpha \sin \beta}{h \sin (\alpha - \beta)}$. Aus dieser und der letzten der beiden anderen Gleichungen, welche man leicht auf folgende Form bringen kann:

$$2 \sin (\beta' - \beta'') = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \cos (\beta' - \beta'') - \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cos (\beta' + \beta'') = \frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \sin \tfrac{1}{2} (\beta' + \beta'')^2 - \frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$\sin \frac{1}{2} (\beta' - \beta'')^2$, erhält man $\cot \frac{1}{2} (\beta' - \beta'') = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$

$\left(\frac{s^2 \sin \alpha^2 \sin \beta^2}{h^2 \sin (\alpha - \beta)^2} - 1\right)$ und $\sin \frac{1}{2} (\beta' + \beta'') = \frac{s \sin \frac{1}{2} (\beta' - \beta'') \sin \alpha \sin \beta}{h \sin (\alpha - \beta)}$. Hat man auf diese Weise sämtliche Winkel berechnet, so ist die Aufgabe auf sehr einfache Trapezaufgaben zurückgeführt.

299. $f - e = g$, h, α, β. Ein ähnliches Verfahren wie in 298 ergiebt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta' - \beta'') = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \left(1 - \frac{g^2 \sin \alpha^2 \sin \beta^2}{h^2 \sin (\alpha - \beta)^2}\right)$ und $\cos \frac{1}{2} (\beta' + \beta'') = \frac{g \cos \frac{1}{2} (\beta' - \beta'') \sin \alpha \sin \beta}{h \sin (\alpha - \beta)}$.

l) In den Aufgaben 366 bis 461 kommt die unter d) angegebene Konstruktion in Anwendung. Aus dreien der gegebenen Stücke läßt sich Dreieck AGC berechnen, das vierte ist $b + d$ oder $b - d$. Die Aufgaben werden gebildet durch Kombination der unter d) 1 bis 48 aufgeführten Stücke mit $b + d$ oder $b - d$. Nur an einer der Aufgaben wird die Berechnung hier ausgeführt.

366. $b + d$, h, β', β''. Aufl. ähnlich wie 298. Zunächst ist $\alpha - \beta$ und dann $\alpha + \beta$ zu berechnen.

Hosted by Google

m) In den folgenden Aufgaben sind a, c und zwei Winkel gegeben. Es ist $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$, folglich $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha''\sin\beta''}{\sin\beta'\sin\gamma'}$ (I). Durch eine ähnliche Behandlung der Verhältnisse $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{c}$, $\frac{a}{e}$ und $\frac{e}{c}$, $\frac{a}{f}$ und $\frac{f}{c}$ erhält man die Gleichungen $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha'\sin\beta'}{\sin\beta''\sin\gamma''}$ (II), $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha\sin\alpha''}{\sin\beta\sin\gamma''}$ (III), $\frac{a}{c} = \frac{\sin\beta\sin\alpha'}{\sin\alpha\sin\gamma'}$ (IV). Mit Zuhülfenahme der Konstruktion unter g) findet man ebenso durch Multiplikation der Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a-c'}$, $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{a-c'}$, $\frac{a-c}{b}$ und $\frac{b}{c}$, $\frac{a-c}{d}$ und $\frac{d}{c}$ die Gleichungen $\frac{a}{a-c} = \frac{\sin\alpha\sin\alpha''}{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta'}$ (V), $\frac{a}{a-c} = \frac{\sin\beta\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta''}$ (VI), $\frac{a-c}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta''}{\sin\alpha\sin\gamma'}$ (VII), $\frac{a-c}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta'}{\sin\beta\sin\gamma''}$ (VIII). Mit Zuhülfenahme der Konstruktion unter h) findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren die Gleichungen $\frac{a+c}{a} = \frac{\sin\varepsilon\sin\alpha}{\sin\alpha'\sin\beta'}$ (IX), $\frac{a+c}{a} = \frac{\sin\varepsilon\sin\beta}{\sin\alpha''\sin\beta''}$ (X), $\frac{a+c}{c} = \frac{\sin\varepsilon\sin\beta}{\sin\beta'\sin\gamma'}$ (XI), $\frac{a+c}{c} = \frac{\sin\varepsilon\sin\alpha}{\sin\beta''\sin\gamma''}$ (XII). Endlich erhält man noch durch Multiplikation von (III) und (IV) $\frac{a^2}{c^2} = \frac{\sin\alpha'\sin\alpha''}{\sin\gamma'\sin\gamma''}$ (XIII), ebenso durch Division von (IX) und (V) $\frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{\sin\varepsilon\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha'\sin\alpha''}$ (XIV), und durch Multiplikation von (VIII) und (XI) $\frac{a^2-c^2}{c^2} = \frac{\sin\varepsilon\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma'\sin\gamma''}$ (XV). Jede dieser Gleichungen enthält die Seiten a, c und vier Winkel, zwischen denen aber jedesmal eine einfache Gleichung besteht. So tritt z. B. zu (I) die Gleichung $\alpha'' + \beta' + \gamma' + \beta'' = \pi$, zu (IX) die Gleichung $\varepsilon - \alpha' = \alpha - \beta'$, zu (XIV) die Gleichung $\varepsilon - \alpha' = \alpha'' + (\alpha+\beta) - \pi$ u. s. w. hinzu.

Sind nun a und c gegeben und außerdem zwei in einer der Gleichungen (I) bis (XV) enthaltenen Winkel, so liefert diese Gleichung den Quotienten oder das Produkt der Sinus zweier anderen Winkel;

Hosted by Google

und aus der entsprechenden Winkelgleichung findet man außerdem die Summe oder Differenz derselben unbekannten Winkel, so daß man dieselben nach § 6, 1, 2 oder § 7, 1, 2 berechnen kann. Die Aufgaben sind dann entweder auf einfache Trapezaufgaben in §. 24 oder auf solche unter k) zurückgeführt. Außer a und c ist gegeben:

462. α'', γ'. Aufl. (I), (X), (XI), (XIII), (XV).
463. α'', β''. Aufl. (I), (X).
464. α', γ'. Aufl. (IV), (XIII), oder da $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ ist, mit Hülfe von (VI), (XIV), (XV).
465. α, α''. Aufl. (III), (V). 467. α, ε. Aufl. (IX), (XII).
466. $\alpha + \beta$, β'. Aufl. (V). 468. α', α''. Aufl. (XIII), (XIV).
469. ε, $\alpha + \beta$. Aufl. (XIV), (XV).

n) Es ist $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha''}$, $\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''}$, folglich $\frac{b}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha' \sin\beta'}{\sin\alpha'' \sin\beta''}$. Auf ähnliche Weise erhält man $\frac{b}{d} = \frac{\sin\gamma'' \sin\beta''}{\sin\gamma' \sin\beta'}$. Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man $\frac{b^2}{d^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma''}{\sin\alpha'' \sin\gamma'}$. Ganz ebenso leitet man die Gleichung $\frac{e^2}{f^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma'}{\sin\alpha'' \sin\gamma''}$ her. Sind nun b, d und zwei der Winkel α', α'', γ', γ'' gegeben, so kennt man von den anderen beiden den Quotienten oder das Produkt der Sinus und vermöge der Gleichung $\alpha' + \gamma'' = \alpha'' + \gamma'$ noch die Summe oder Differenz, so daß man diese beiden Winkel nach § 6, 1, 2 oder § 7, 1, 2 finden kann. Die Aufgabe ist dann auf 86 zurückgeführt. Ähnlich ist das Verfahren, wenn e, f und zwei der Winkel α', α'', γ', γ'' gegeben sind. Die Aufgabe wird dann auf 87 zurückgeführt.

470. b, d, α', γ' 472. b, d, α', γ'' 474. e, f, α', α''
471. b, d, α', α'' 473. e, f, α', γ' 475. e, f, α', γ''.

o) 476. b, d, ε, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. Aus der in n) entwickelten Gleichung $\frac{b^2}{d^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma''}{\sin\alpha'' \sin\gamma'}$ erhält man durch einfache Entwicklung, indem man beachtet, daß $\alpha' - \gamma' = \alpha'' - \gamma'' = \pi - \sigma$ ist,

$$\frac{b^2}{d^2} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos(\alpha' + \gamma'')}{\cos(\alpha'' - \gamma') - \cos(\alpha'' + \gamma')} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos\varepsilon}{\cos(\alpha'' - \gamma') - \cos\varepsilon},$$

folglich

$$\frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') + \cos(\alpha'' - \gamma') - 2\cos\varepsilon}{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos(\alpha'' - \gamma')},$$

$$= -\frac{\cos\sigma \cos\frac{1}{2}(\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'') + \cos\varepsilon}{\sin\sigma \sin\frac{1}{2}(\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'')}.$$

Führt man noch einen Hülfswinkel ein, indem man $\frac{b}{d} = \cot\varkappa$ setzt, so erhält man

Hosted by Google

die Gleichung $\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'-\alpha'+\gamma'')+\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\cos 2\varkappa}\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'-\alpha'+\gamma'')=-\frac{\cos\varepsilon}{\cos\sigma}$. Hat man aus derselben $\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'-\alpha'+\gamma'')$ nach § 3, 1 berechnet, so findet man, da $\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'+\alpha'+\gamma'')=\varepsilon$ ist, die Winkel $\alpha''+\gamma''$ und $\alpha'+\gamma'$, und somit auch α'', γ'', α', γ', da man $\alpha''-\gamma''$ und $\alpha'-\gamma'$ kennt. Die Aufgabe ist somit auf 86 zurückgeführt.

477. e, f, ε, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. mittelst der Gleichung $\frac{e^2}{f^2}=\frac{\sin\alpha'\sin\gamma'}{\sin\alpha''\sin\gamma''}$ ähnlich wie 476 auf 87 zurückzuführen.

478. e, f, α, β. 1. Aufl. Nach g), (II) ist $\cot\beta''-\cot\beta'=\cot\beta-\cot\alpha$, ferner $\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}=\frac{f}{e}$. Die beiden Gleichungen lassen sich leicht auf die Form $\frac{\sin(\beta'-\beta'')}{\cos(\beta'-\beta'')-\cos(\beta'+\beta'')}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ und $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'+\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'-\beta'')}=\frac{f+e}{f-e}$ bringen. Eliminiert man $(\beta'+\beta'')$, so gelangt man zu der Gleichung $\cos(\beta'-\beta'')+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sin(\beta'-\beta'')=\frac{f^2+e^2}{2ef}$ oder, wenn man für $\beta'-\beta''$ den halben Winkel einführt, $(f+e)^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'-\beta'')^2-\frac{2ef\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'-\beta'')+(f-e)^2=0$.
2. Aufl. Durch leichte Entwicklung findet man [vergl. n)] $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}=\frac{f\sin\beta}{e\sin\alpha}$ und $\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'}=\frac{f\sin\alpha}{e\sin\beta}$. Hieraus leitet man, indem man $\frac{e}{f}=\operatorname{tg}\varkappa$, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\lambda$ setzt, $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha')}=\frac{\sin(\lambda+\varkappa)}{\sin(\lambda-\varkappa)}$ und $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')}=\frac{\cos(\lambda-\varkappa)}{\cos(\lambda+\varkappa)}$ her. Dividiert man beides, so erhält man unter Berücksichtigung von $\alpha''-\alpha'=\gamma''-\gamma'$ die Gleichung $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')}=\frac{\sin 2(\lambda+\varkappa)}{\sin 2(\lambda-\varkappa)}$. Da $\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha')-\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')=\pi-\sigma$ ist, so findet man $\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha')$ und $\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$ nach § 6, 10. Man erhält $\sin(\alpha''+\alpha'+\gamma''+\gamma')=\sin\varepsilon=\operatorname{tg}2\lambda\cot 2\varkappa\sin(\alpha+\beta)$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha')=\frac{\sin(\lambda-\varkappa)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha')}{\sin(\lambda+\varkappa)}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')=\frac{\cos(\lambda+\varkappa)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')}{\cos(\lambda-\varkappa)}$.

479. b, d, β', β''. Aufl. ähnlich wie 478.

Hosted by Google

480. a, c, e, α'. Aufl. Aus $\frac{a+c}{e} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta''}$ und $\frac{c}{e} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varepsilon-\alpha')}{\sin(\alpha'+\beta'')}$ erhält man $\frac{a+c+e}{a+c-e} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon+\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta'')}$ und $\frac{e+c}{e-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon+\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\alpha'-\varepsilon+\beta'')}$. Dividiert man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\frac{\operatorname{tg}(\alpha'-\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta''))}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta'')} = \frac{(a+c+e)(e-c)}{(a+c-e)(e+c)}$ (§ 6, 9).

481. a, c, e, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. Aus $\frac{a}{e} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta}$ und $\frac{c}{e} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha}$ erhält man $\frac{e+a}{e-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\alpha'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\alpha'')}$ und $\frac{e+c}{e-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma'')}$. Dividiert man beide Gleichungen, so erhält man $\frac{(e-a)(e+c)}{(e+a)(e-c)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\alpha'')$. Ferner ist $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'') + \frac{1}{2}(\beta-\alpha'') = \sigma - \frac{1}{2}\pi$ (§ 6, 7).

482. a, b, c, ε. Aufl. Aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ findet man $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}$ und $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta''+\gamma')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}$ und durch Multiplikation beider Gleichungen $\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} = \cot\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')\cot\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')$, wobei $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta') - \frac{1}{2}(\beta''-\gamma') = \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$ ist (§ 6, 12).

483. a, b, c, α'. Aufl. ähnlich wie 482, indem man die Gleichungen $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ und $\frac{a-c}{b} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ benutzt.

484. b, d, e, f. 1. Aufl. Es ist $a^2 = f^2 + d^2 - 2fd\cos\alpha' = e^2 + b^2 - 2eb\cos\alpha''$, ferner, da $\triangle ABD = \triangle ABC$ ist, $fd\sin\alpha' = eb\sin\alpha''$. Die Gleichungen lassen sich in der Form $2fd\cos\alpha' - 2eb\cos\alpha'' = f^2 + d^2 - e^2 - b^2$ und $2fd\sin\alpha' - 2eb\sin\alpha'' = 0$ schreiben. Indem man beide quadriert und addiert, ergiebt sich $\cos(\alpha''-\alpha') = \frac{4f^2d^2+4e^2b^2-(f^2+d^2-e^2-b^2)^2}{8febd}$.

Elegantere Ausdrücke ergeben sich auf bekannte Weise für die Funktionen von $\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha')$. So ist z. B., wenn man $f+e+b+d = 2s$ setzt, $\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha') = \sqrt{\frac{(s-e)(s-f)(s-b)(s-d)}{efbd}}$.

Zur Berechnung von α'' und α' dient $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{eb}{fd}$ (§ 7, 2)

Hosted by Google

oder die leicht zu entwickelnden Gleichungen $\sin\alpha'' = \frac{2\,fd\sin(\alpha''-\alpha')}{f^2+d^2-e^2-b^2}$, $\sin\alpha' = \frac{2\,eb\sin(\alpha''-\alpha')}{f^2+d^2-e^2-b^2}$. 2. Aufl. Verlängert man AD und BC bis zu ihrem Durchschnittspunkte H und setzt HD = x, HC = y, so ist $\cos CHD = \frac{x^2+(b+y)^2-f^2}{2x(b+y)} = \frac{y^2+(d+x)^2-e^2}{2y(d+x)}$. Da beide Nenner einander gleich sind, ergiebt sich $e^2 - 2dx - d^2 = f^2 - 2by - b^2$. Aus dieser Gleichung und der Proportion $x : y = d : b$ findet man $x = \frac{d(f^2-e^2)}{2(b^2-d^2)} - \frac{d}{2}$ und $y = \frac{b(f^2-e^2)}{2(b^2-d^2)} - \frac{b}{2}$. Dadurch lassen sich die Dreiecke CHA und BHD, sodann successive sämtliche Stücke des Trapezes berechnen.

§ 37.

Aufgaben über das allgemeine Viereck.

a) In den folgenden Aufgaben dienen zur Berechnung von △ ABC folgende Stücke:

1. a, α'', β'
2. a, b, β
3. a, e, β'
4. a, b, α''
5. a, e, α''
6. a, e, β
7. a, b e
8. a + b, α'', β' (§ 14, 1)
9. a − b, α'', β' (§ 14, 2)
10. a + b, e, α'' (§ 14, 70)
11. a − b, e, α'' (§ 14. 71)
12. a + b, e, β (§ 14, 51)
13. a − b, e, β (§ 14, 53)
14. $a^2 - b^2$, α'', β' (§ 14, 12)
15. $a^2 - b^2$, e, β (§ 14, 62).

Außerdem kann gegeben sein:

α) γ'', δ'
β) α, δ'
γ) α, γ
δ) α, δ
ε) c, γ''
ζ) d, δ'
η) c, δ'
ϑ) d, γ''
ι) c, α
κ) c, γ
λ) d, α
μ) c, δ
ν) d, δ
ξ) c, d
ο) c + d, γ'' (§ 14, 70)
π) c − d, γ'' (§ 14, 71)
ρ) c + d, δ' (§ 14, 70)
σ) c − d, δ' (§ 14, 71)
τ) c + d, α (§ 14, 70)
υ) c − d, α (§ 14, 71)
φ) c + d, γ (§ 14, 70)
χ) c − d, γ (§ 14, 71)
ψ) c + d, δ (§ 14, 51)
ω) c − d, δ (§ 14, 53)
αα) $c^2 - d^2$, δ (§ 14, 62)
ββ) α', γ'
γγ) β'', δ''
δδ) α, α'
εε) α, γ'
ζζ) γ'', δ''
ηη) β'', γ'
ϑϑ) α', δ''
ιι) δ', δ''
κκ) α', γ''
λλ) α, ε
μμ) c, β''
νν) d, α'

Hosted by Google

ξξ) c, γ'	χχ) f, α'	ζζζ) F, d	ϑϑϑ) F, δ'
οο) d, δ''	ψψ) f, β''	ηηη) F, γ''	
ππ) c, δ''	ωω) f, γ'	ιιι) F, δ (§ 14, 65 oder 68)	
ρρ) d, γ'	ααα) f, δ''	κκκ) F, c + d (§ 14, 450)	
σσ) c, ε	βββ) f, ε	λλλ) F, c — d (§ 14, 452)	
ττ) f, γ''	γγγ) c, f	μμμ) F, ε	ooo) F, γ'
υυ) f, δ'	δδδ) d, f	νvν) F, f	πππ) F, δ''.
φφ) f, α	εεε) F, c		

Nach Berechnung von △ ABC ist in den Fällen α) bis αα), ferner in εεε) bis λλλ) das Dreieck ACD zu berechnen, in den übrigen Fällen die Dreiecke ABD und CBD. Ist F gegeben, so berechne man den Inhalt von △ ABC und findet durch Subtraktion den von ACD. In μμμ) bis πππ) ist zu beachten, daß $2\,F = ef \sin \varepsilon$ [s. unter c)], für die beiden letzten Fälle, daß $\varepsilon = \alpha'' + \gamma'$, $\pi - \varepsilon = \beta' + \delta''$ ist.

Diejenigen Aufgaben, in denen nur die vier Hauptfälle in Anwendung kommen, sind bereits § 27 angeführt.

b) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter a) angegebenen Verfahren lösen, sind aber nicht unter den aus Kombination von 1) bis 15) mit α) bis πππ) gebildeten Aufgaben.

1. a + b, c, e, γ', δ''	5. a + b, e, α', γ', δ''	9. $a^2 - b^2$, c, e, γ', δ''
2. a — b, c, e, γ', δ''	6. a — b, e, α', γ', δ''	10. $a^2 - b^2$, e, f, γ', δ''
3. a + b, e, f, γ', δ''	7. a + b, e, γ', γ'', δ''	11. $a^2 - b^2$, e, α' γ', δ''
4. a — b, e, f, γ', δ''	8. a — b, e, γ', γ'', δ''	12. $a^2 - b^2$, e, γ', γ'', δ''

c) Zieht man durch die Ecken Parallelen zu den Diagonalen, so ist der Inhalt des von den Parallelen eingeschlossenen Parallelogramms gleich 2 F. Daher ist $2\,F = ef \sin \varepsilon$, also $e = \frac{2\,F}{f \sin \varepsilon}$. Ist F, f ± e und ε gegeben, so findet man fe und dann f und e nach § 10. Die folgenden Aufgaben sind hierdurch auf solche unter a) zurückgeführt.

13. F, f, α'', β', ε	23. F, f + e, α'', β', ε	33. F, a+b, f+e, α'', γ'
14. F, a, f, β', δ''	24. F, f — e, α'', β', ε	34. F, a+b, f—e, α'', γ'
15. F, a, f, α'', γ'	25. F, f + e, a, β', δ''	35. F, a—b, f+e, α'', γ'
16. F, a, f, β, ε	26. F, f — e, a, β', δ''	36. F, a—b, f—e, α'', γ'
17. F, a, b, f, ε	27. F, f + e, a, α'', γ'	37. F, a + b, f + e, β, ε
18. F, a + b, f, α'', γ'	28. F, f — e, a, α'', γ'	38. F, a + b, f — e, β, ε
19. F, a — b, f, α'', γ'	29. F, f + e, a, β, ε	39. F, a — b, f + e, β, ε
20. F, a + b, f, β, ε	30. F, f — e, a, β, ε	40. F, a — b, f — e, β, ε
21. F, a — b, f, β, ε	31. F, f + e, a, b, ε	41. F, $a^2 - b^2$, f+e, β, ε
22. F. $a^2 - b^2$, f, β, ε	32. F, f — e, a, b, ε	42. F, $a^2 - b^2$, f—e, β, ε.

d) Man kann kein Dreieck direkt berechnen. Unter den gegebenen Stücken befinden sich nur die Seiten und Winkel des Vierecks oder auch

Hosted by Google

Aggregate derselben. Man fälle auf AB die Senkrechten CF und DG. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

1. α und β sind spitze Winkel, so daß F und G beide auf AB liegen. Dann ist $a = AG + GF + FB$ und $AG = d \cos \alpha$, $FB = b \cos \beta$, $GF = -c \cos(\beta + \gamma)$, folglich $a = b \cos \beta + d \cos \alpha - c \cos(\beta + \gamma)$ (I).

2. α und β sind beide stumpf, so daß F und G außerhalb AB fallen. Dann ist $a = GF - AG - FB$, und $GF = -c \cos(\beta + \gamma)$, $AG = d \cos(\pi - \alpha) = -d \cos \alpha$, ebenso $FB = -b \cos \beta$, folglich $a = b \cos \beta + d \cos \alpha - c \cos(\beta + \gamma)$.

3. α ist stumpf und β spitz. Dann fällt F innerhalb, G außerhalb AB und es ist $a = GF + FB - GA$ und $GF = -c \cos(\beta + \gamma)$, $GA = -d \cos \alpha$, $FB = b \cos \beta$, folglich auch für diesen Fall und somit ganz allgemeingültig $a = b \cos \beta + d \cos \alpha - c \cos(\beta + \gamma)$ (I). Zieht man durch D eine Parallele zu AB, welche CF in H trifft und unterscheidet die beiden Fälle, ob H auf CF selbst oder auf der Verlängerung von CF liegt, so leitet man in ähnlicher Weise wie vorher die allgemeingültige Gleichung $b \sin \beta - d \sin \alpha - c \sin(\beta + \gamma) = 0$ (II) ab. Diese beiden Gleichungen (I) und (II) enthalten die sieben Stücke a, b, c, d, α, β, γ. Sind also fünf dieser Stücke gegeben, so hat man zur Berechnung der beiden anderen zwei Gleichungen. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn sich unter den gegebenen Stücken Aggregate von Seiten oder von Winkeln befinden. Durch Elimination von c aus (I) und (II) erhält man $a \sin(\beta + \gamma) = b \sin \gamma - d \sin \delta$ (III). Durch Addition und Subtraktion von (II) und (III) ergiebt sich noch $(a + c) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = b \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) - d \cos \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ (IV) und $(a - c) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = b \sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta) + d \sin \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ (V). Sind von den Stücken a, b, c, d, α, β, γ, δ fünf Stücke gegeben, unter denen sich natürlich nicht sämtliche vier Winkel befinden dürfen, so dienen zur Berechnung der drei fehlenden Stücke zwei beliebige der Gleichungen (I) bis (V) mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$. Befindet sich unter den gegebenen Stücken ein Aggregat zweier Seiten, so hat man allerdings vier unbekannte Größen, dafür aber auch eine vierte Gleichung, z. B. wenn $a + b$ gegeben ist, $a + b = s$. Sind zwei Aggregate gegeben, so hat man 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten.

Anmerkung: Man könnte auch anstatt, wie es hier geschehen ist, die Seiten auf a zu projizieren, dieselben auf eine der anderen Seiten projizieren. Die dadurch erhaltenen Gleichungen würden sich aber nur durch die Form von (I) und (II) unterscheiden und sich leicht auf dieselben zurückführen lassen.

Hosted by Google

43. b, c, d, α, β. Aufl. $\sin(\beta+\gamma) = \frac{b \sin\beta - d \sin\alpha}{c}$.

44. a, c, α, β, γ. Aufl. $b = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $d = \frac{a \sin\beta - c \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

45. b, c, d, $\alpha+\beta=\sigma$, $\beta+\gamma=\sigma'$. Aufl. Es iſt $b \sin\beta - d \sin\alpha = c \sin\sigma'$ und $\alpha+\beta=\sigma$ (§ 3, 3).

46. a, b, c, d, $\gamma+\alpha=\sigma$. Aufl. Es iſt $a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$, daher $2bc\cos\gamma - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 - d^2$ (§ 3, 5).

47. a, b, c, d, $\gamma-\alpha=\sigma$ (45).

48. a+c=s, b, α, β, γ. Aufl. $d = \frac{b\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\delta-\alpha)}$.

49. a – c, b, α, β, γ (48).

50. a + b = s, c, α, β, γ. Aufl. $d = \frac{s \sin\frac{1}{2}\beta - c \sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma)}{\sin(\frac{1}{2}\beta+\alpha)}$.

51. a – b, c, α, β, γ (50).

52. a+b=s, c, d, α, β. Aufl. $\sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma) = \frac{s \sin\frac{1}{2}\beta - d \sin(\frac{1}{2}\beta+\alpha)}{c}$.

53. a – b, c, d, α, β (52).

54. a + b = s, c, d, α, γ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{s - d\cos\alpha - c\cos\gamma}{c\sin\gamma + d\sin\alpha}$.

55. a – b, c, d, α, γ (54).

56. a+c = s, b, d, α, β. Aufl. $\cot\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{s - b\cos\beta - d\cos\alpha}{b\sin\beta - d\sin\alpha}$.

57. a–c, b, d, α, β (56).

58. a+c=s, b+d=s', α, β, γ. Aufl. $b = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + s'\cos\frac{1}{2}(\delta-\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(\delta+\beta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}$,
$d = \frac{s'\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\delta+\beta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}$.

59. a – c, b – d, α, β, γ (58). 60. a + c, b – d, α, β, γ (58).

61. b + c + d = s, a, α, β, γ. Aufl. $b = \frac{s\sin\frac{1}{2}\delta - a\sin(\alpha+\frac{1}{2}\delta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma}$,
$d = \frac{s\sin\frac{1}{2}\gamma - a\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\delta}$.

62. a+b = s, c+d = s', α, β, γ. 1. Aufl. $b = \frac{s'\sin\frac{1}{2}\delta - s\sin(\alpha+\frac{1}{2}\delta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\beta}$,
$d = \frac{s'\sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma) - s\sin\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\delta}$. 2. Aufl. Es iſt $\frac{a+b}{e} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ und $\frac{c+d}{e} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma''-\delta')}{\sin\frac{1}{2}\delta}$, folglich, wenn

Hosted by Google

man beides dividiert, $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\cos\frac{1}{2}(\gamma''-\delta')}=\frac{s\sin\frac{1}{2}\beta}{s'\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')-\frac{1}{2}(\gamma''-\delta')=\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ (§ 7, 6).

63. $a+b$, $c-d$, α, β, γ (62). 64. $a-b$, $c-d$, α, β, γ (62).

e) a, c, e, f bilden ein Viereck **ABDC**, in welchem sich zwei gegenüberliegende Seiten **AC** und **BD** schneiden. Wendet man auf dasselbe ein ähnliches Verfahren an, wie in d) auf das Viereck ABCD, indem man a, c und f auf e projiziert, so erhält man hier ebenso wie dort zwei Gleichungen, nämlich $a\cos\beta'+c\cos\delta'+f\cos\varepsilon=e$ (I), $a\sin\beta'+c\sin\delta'=f\sin\varepsilon$ (II), aus denen man noch durch Elimination von f die Gleichung $a\sin\delta''+c\sin\beta''=e\sin\varepsilon$ (III) erhält. Durch Addition und Subtraktion von (II) und (III) ergiebt sich noch $(f+e)\sin\frac{1}{2}\varepsilon=a\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta'')+c\cos\frac{1}{2}(\beta''-\delta')$ (IV), $(f-e)\cos\frac{1}{2}\varepsilon=a\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta'')-c\sin\frac{1}{2}(\beta''-\delta')$ (V). Bei einigen Aufgaben ist zu beachten, daß $\beta+\gamma=\pi-(\beta'-\delta')$ ist.

65. a, c, f, β', δ'. Aufl. $\sin\varepsilon=\frac{a\sin\beta'+c\sin\delta'}{f}$.

66. a, e, f, δ', β''. Aufl. $\sin(\beta'-\delta')=\frac{f\sin\beta''-e\sin\delta'}{a}$.

67. a, c, β', β'', δ'. Aufl. $f=\frac{a\sin\beta'+c\sin\delta'}{\sin\varepsilon}$, $e=\frac{a\sin\delta''+c\sin\beta''}{\sin\varepsilon}$.

68. e, f, β', β'', δ'. Aufl. $a=\frac{f\sin\beta''-e\sin\delta'}{\sin(\beta'-\delta')}$, $c=\frac{e\sin\beta'-f\sin\delta''}{\sin(\beta'-\delta')}$.

69. a, c, f, ε, $\beta+\gamma=\sigma$. Aufl. aus (II) mit Hülfe von $\beta'-\delta'=\pi-\sigma$ (§ 3, 4).

70. a, e, f, ε, $\beta+\gamma=\sigma$. Aufl. $f\sin\beta''-e\sin\delta'=a\sin\sigma$ (§ 3, 3).

71. $a+c=s$, e, β', β'', δ'. Aufl. $f=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')-e\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta''+\delta'')}$.

72. $a-c$, e, β', β'', δ' (71).

73. $f+e=s$, a, β', β'', δ'. Aufl. $c=\frac{s\sin\frac{1}{2}\varepsilon-a\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta'')}{\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta'')}$.

74. $f-e$, a, β', β'', δ' (73).

75. $a+c=s$, e, f, β', δ''. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'-\delta')=\frac{s-e\cos\beta'-f\cos\delta''}{e\sin\beta'-f\sin\delta''}$.

76. $a-c$, e, f, β', δ'' (75).

77. $a+c=s$, e, f, β', δ'. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\beta''+\delta'')=\frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')-e\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta')}{f}$.

78. $a-c$, e, f, β', δ' (77).

79. $a+c=s$, e, f, β', β''. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta'-\delta')=\frac{s-e\cos\beta'-f\cos\beta''}{e\sin\beta'+f\sin\beta''}$.

Hosted by Google

80. a — c, e, f, β', β'' (79).

81. f + e, = s, a, c, β', δ''. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\beta''-\delta') = \frac{s\sin\frac{1}{2}\varepsilon - a\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta'')}{c}$.

82. f — e, a, c, β', δ'' (81).

83. f + e = s, a, c, β', δ'. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s - a\cos\beta' - c\cos\delta'}{a\sin\beta' + c\sin\delta'}$.

84. f — e, a, c, β', δ' (83).

85. f + e = s, a, c, β', β''. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s - a\cos\beta' - c\cos\beta''}{a\sin\beta' + c\sin\beta''}$.

86. f — e, a, c, β', β'' (85).

87. a + c = s, f + e = s', β', β'', δ'. Aufl.

$$a = \frac{s'\sin\frac{1}{2}\varepsilon - s\cos\frac{1}{2}(\beta''-\delta')}{2\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta')\sin\frac{1}{2}(\beta''-\beta')},\quad c = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta'') - s'\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{2\sin\frac{1}{2}(\beta'-\delta')\sin\frac{1}{2}(\beta''-\beta')},$$

$$e = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta') - s'\cos\frac{1}{2}(\beta''+\delta'')}{2\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\beta''-\beta')},$$

$$f = \frac{s'\cos\frac{1}{2}(\beta'+\delta') - s\cos\frac{1}{2}(\beta'-\delta')}{2\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\beta''-\beta')}.$$

88. a — c, f + e, β', β'', δ' (87). 89. a + c, f — e, β', β'', δ' (87).

90. a — c, f — e, β', β'', δ' (87).

f) Die folgenden Aufgaben sind mit Hülfe der in c) entwickelten Gleichung $2F = ef\sin\varepsilon$ auf entsprechende unter e) zurückzuführen.

91. F, a, e, f, δ'	98. F, f + e, β', β'', δ'	105. F, a — c, e, f, β'
92. F, a, e, δ', β''	99. F, f — e, β', β'', δ'	106. F, a + c, e, β', δ''
93. F, a, f + e, δ', β''	100. F, a, e, f, $\beta+\gamma$	107. F, a — e, e, β', δ''
94. F, a, f — e, δ', β''	101. F, a, e, ε, $\beta+\gamma$	108. F, a+c, f+e, β', δ''
95. F, e, f, β', β''	102. F, a, f+e, ε, $\beta+\gamma$	109. F, a+c, f—e, β', δ''
96. F, e, f, β', δ'	103. F, a, f — e, ε, $\beta+\gamma$	110. F, a—c, f+e, β', δ''
97. F, e, β', β'', δ'	104. F, a + c, e, f, β'	111. F, a—c, f—e, β', δ''

g) Folgende Aufgaben mögen hier Platz finden, weil einige der unter h) verzeichneten auf dieselben zurückzuführen sind.

112. a + c = s, α'', β', γ'', δ'. Aufl. $a = \frac{e\sin\alpha''}{\sin\beta}$, $c = \frac{e\sin\gamma''}{\sin\delta}$,

daher $e = \frac{s\sin\beta\sin\delta}{\sin\alpha''\sin\delta + \sin\gamma''\sin\beta}$.

113. a — c, α'', β', γ'', δ'. Aufl. ähnlich wie 112.

114. f + e = s, α, β, α', α''. Aufl. $f = \frac{a\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, $e = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha''}$,

daher $a = \frac{s\sin\alpha'\sin\alpha''}{\sin\alpha\sin\alpha'' + \sin\beta\sin\alpha'}$.

115. f — e = s, α, β, α', α''. Aufl. ähnlich wie 114.

Hosted by Google

116. $a + b + c + d = s$, α'', β' γ'', δ'. Aufl. $a = \frac{e \sin \alpha''}{\sin \beta}$, $b = \frac{e \sin \beta'}{\sin \beta}$, $c = \frac{e \sin \gamma''}{\sin \delta}$, $d = \frac{e \sin \delta'}{\sin \delta}$, folglich $s = e \left(\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta')} + \frac{\cos \frac{1}{2}(\gamma'' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\gamma'' + \delta')} \right)$, wodurch e zu finden ist.

117. $b + c + d$, α'', β', γ'', δ'. Aufl. ähnlich wie 116.

118. F, α'', β', γ'', δ'. Aufl. Es ist $2F = ab \sin \beta + cd \sin \delta$, folglich, wenn man $a = \frac{e \sin \alpha''}{\sin \beta}$, $b = \frac{e \sin \beta'}{\sin \beta}$, $c = \frac{e \sin \gamma''}{\sin \delta}$, $d = \frac{e \sin \delta'}{\sin \delta}$ einsetzt, $2F = e^2 \left(\frac{\sin \alpha'' \sin \beta'}{\sin \beta} + \frac{\sin \gamma'' \sin \delta'}{\sin \delta} \right)$, wodurch e zu finden ist.

119. F, α, β, α', α''. Aufl. Man findet leicht β', δ'', γ', γ'', ε. Nun ist $2F = ef \sin \varepsilon$ und $e = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha''}$, $f = \frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha'}$. Indem man dies einsetzt, erhält man $a = \sqrt{\frac{2F \sin \alpha' \sin \alpha''}{\sin \alpha \sin \beta \sin \varepsilon}}$.

h) Die Gestalt des Vierecks ist durch vier von den Winkeln α, β, γ, δ, ε, α', α'', β', β'', γ', γ'', δ', δ'' bestimmt. Natürlich dürfen diese vier Winkel nicht voneinander abhängig sein, wie etwa α, β, γ, δ, oder β', β'', δ', δ''. Befinden sich also unter den gegebenen Stücken vier unabhängige solcher Winkel, so müssen sich demnach sämtliche anderen berechnen lassen, und die Aufgabe ist dadurch auf eine einfache Vierecksaufgabe oder auf solche unter a) und g) zurückgeführt. Einige Fälle, in denen diese Berechnung einfach ausfällt, mögen hier angeführt und dazu folgende Beziehungen zwischen den Winkeln entwickelt werden. Durch Multiplikation von $\frac{f}{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$, $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \beta'}$, $\frac{b}{f} = \frac{\sin \beta''}{\sin \gamma}$ erhält man $\sin \alpha \sin \alpha'' \sin \beta'' = \sin \gamma \sin \alpha' \sin \beta'$ (I). Behandelt man ebenso die Verhältnisse $\frac{f}{d}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{c}{f}$, ferner $\frac{e}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{e}$, endlich $\frac{e}{d}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{a}{e}$, so erhält man die Gleichungen $\sin \alpha \sin \delta' \sin \gamma' = \sin \gamma \sin \delta'' \sin \gamma''$ (II), $\sin \beta \sin \beta'' \sin \gamma'' = \sin \delta \sin \beta' \sin \gamma'$ (III), $\sin \beta \sin \alpha' \sin \delta' = \sin \delta \sin \alpha'' \sin \delta''$ (IV). Durch Division von (I) und (II) ergiebt sich $\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \sin \delta' = \sin \alpha'' \sin \beta'' \sin \gamma'' \sin \delta''$ (V), durch Multiplikation von (II) und (III) $\sin \alpha \sin \beta \sin \delta' \sin \beta'' = \sin \gamma \sin \delta \sin \delta'' \sin \beta'$ (VI), durch Division von (I) und (IV) $\sin \alpha \sin \delta \sin \gamma' \sin \alpha'' = \sin \beta \sin \gamma \sin \gamma'' \sin \alpha'$ (VII).

Hosted by Google

1. Gegeben sei α'', β', γ'', δ'. Aufl. Man findet leicht α, β, γ, δ. Dann hat man nach (I) $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''} = \frac{\sin\alpha\sin\alpha''}{\sin\gamma\sin\beta'}$ und $\alpha' + \beta'' = \delta = \pi - \gamma'' - \delta'$, oder nach (II) $\frac{\sin\gamma'}{\sin\delta''} = \frac{\sin\gamma\sin\gamma''}{\sin\alpha\sin\delta'}$ und $\gamma' + \delta'' = \beta = \pi - \alpha'' - \beta'$ (§ 7, 1). Außer α'', β', γ'', δ' ist gegeben:

120. a + d 122. f 124. f − e (115)
121. a − d 123. f + e (114) 125. F.

2. Gegeben sei α', α'', β', β''. Aufl. Man findet leicht β und δ. Dann hat man nach (I) $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha'\sin\beta'}{\sin\alpha''\sin\beta''}$ und $\alpha + \gamma = 2\pi - \beta - \delta$, oder nach (III) $\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''} = \frac{\sin\beta\sin\beta''}{\sin\delta\sin\beta'}$ und $\gamma' - \gamma'' = \alpha' - \alpha''$, oder nach (IV) $\frac{\sin\delta'}{\sin\delta''} = \frac{\sin\delta\sin\alpha''}{\sin\beta\sin\alpha'}$ und $\delta' - \delta'' = \beta' - \beta''$ (§ 7, 1, 2). Außer α', α'', β', β'' ist gegeben:

126. a 132. c + d 138. f + e (114)
127. c 133. c − d 139. f − e (115)
128. e 134. a + d 140. F (119)
129. f 135. a − d 141. b + c + d (116)
130. a + b 136. a + c (112) 142. a + b + c + d (116).
131. a − b 137. a − c (113)

3. Gegeben sei γ', δ'', δ, ε. Aufl. Man findet leicht β, α'', β'. Dann hat man nach (III) $\sin\beta''\sin\gamma'' = \frac{\sin\delta\sin\beta'\sin\gamma'}{\sin\beta}$ und $\beta'' - \gamma'' = \delta - \varepsilon$, oder nach (IV) $\sin\alpha'\sin\delta' = \frac{\sin\delta\sin\alpha''\sin\delta''}{\sin\beta}$ und $\alpha' - \delta' = \varepsilon + \delta - \pi$ (§ 6, 2). Außer γ', δ'', δ, ε ist gegeben:

143. a 149. a + d 155. f + e (114)
144. c 150. a − d 156. f − e (115)
145. e 151. c + d 157. F (119)
146. f 152. c − d 158. b + c + d (117)
147. a + b 153. a + c (112) 159. a + b + c + d (116).
148. a − b 154. a − c (113)

4. Gegeben sei α'', β', α', γ''. Aufl. Man findet leicht α, ε, β, γ' δ''. Dann hat man nach (VII) $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma'\sin\alpha''}{\sin\beta\sin\gamma''\sin\alpha'}$ und $\gamma + \delta = 2\pi - \alpha - \beta$, oder nach (V) $\frac{\sin\beta''}{\sin\delta'} = \frac{\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'}{\sin\alpha''\sin\gamma''\sin\delta''}$ und $\beta'' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (§ 7, 1). Außer α'', β', α', γ'' ist gegeben:

160. c + d 161. c − d 162. b + c 163. b − c

Hosted by Google

164. a + c (112) 166. b + d (112) 168. b + c + d (117)
165. a — c (113) 167. b — d (113) 169. a+b+c+d (116).

5. Gegeben sei α'', β', β'', γ''. Aufl. Man findet leicht α und β. Dann hat man nach (I) $\sin\gamma \sin\alpha' = \frac{\sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta''}{\sin\beta'}$ und $\gamma + \alpha' = \pi + \alpha'' - \beta'' - \gamma''$, oder nach (III) $\sin\delta \sin\gamma' = \frac{\sin\beta \sin\beta'' \sin\gamma''}{\sin\beta'}$ und $\delta - \gamma' = \alpha'' + \beta'' - \gamma''$ (§ 6, 1, 2). Außer α'', β', β'', γ'' ist gegeben:

170. a 177. a — b 183. b — d (113)
171. b 178. c + d 184. f + e (114)
172. c 179. c — d 185. f — e (115)
173. d 180. a + c (112) 186. F (119)
174. e 181. a — c (113) 187. b + c + d (117)
175. f 182. b + d (112) 188. a + b + c + d (116).
176. a + b

6. Gegeben sei α, β, γ, ε. 1. Aufl. Nach (I) ist $\frac{\sin\alpha'' \sin\beta''}{\sin\alpha' \sin\beta'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Löst man links die Produkte in Differenzen von Cosinussen auf und beachtet daß $\alpha'' - \beta'' = \varepsilon + \gamma - \pi$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ ist, so erhält man $-\sin\alpha(\cos(\varepsilon+\gamma) + \cos(\alpha''+\beta'')) = \sin\gamma(\cos(\varepsilon-\alpha) - \cos(\alpha'+\beta'))$, folglich $\sin\gamma\cos(\alpha'+\beta') - \sin\alpha\cos(\alpha''+\beta'') = \sin\gamma\cos(\varepsilon-\alpha) + \sin\alpha\cos(\varepsilon+\gamma) = \cos\varepsilon\sin(\gamma+\alpha) + \sin\varepsilon\sin(\gamma-\alpha)$, oder, wenn man einen Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)} = \operatorname{tg}\varphi$ einführt, $\sin\gamma\cos(\alpha'+\beta') - \sin\alpha\cos(\alpha''+\beta'') = \frac{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\varphi+\varepsilon)}{\cos\varphi}$ und $\alpha'+\beta'+\alpha''+\beta'' = \pi - \beta + \delta$, so daß man $\alpha'+\beta'$ und $\alpha''+\beta''$ nach § 3, 5 berechnen kann. Da nun $\alpha'-\beta'$ und $\alpha''-\beta''$ bekannt sind, findet man auch α', β', α'', β'' und somit auch die anderen Winkel. Anstatt der Gleichung (I) hätte man auch in ganz ähnlicher Weise (II), (III) oder (IV) benutzen können. 2. Aufl. Die Gleichung (VII) geht, wenn man den Hülfswinkel $\varkappa$ durch die Gleichung $\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\delta} = \operatorname{tg}\varkappa$ einführt, über in $\frac{\sin\gamma'\sin\alpha''}{\sin\alpha'\sin\gamma''} = \operatorname{tg}\varkappa$. Verwandelt man links die Sinusprodukte in Cosinusdifferenzen, so erhält man $\cos(\alpha''-\gamma') - \cos\varepsilon = \operatorname{tg}\varkappa(\cos(\alpha'-\gamma'') - \cos\varepsilon)$, oder $\cos(\alpha''-\gamma') - \operatorname{tg}\varkappa\cos(\alpha'-\gamma'') = \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi-\varkappa)\cos\varepsilon}{\cos\varkappa}$. Da $\alpha''-\gamma'+\alpha'-\gamma'' = 2\pi - 2(\alpha+\beta)$ ist, so findet man nach

Hosted by Google

§ 3, 5 $\alpha'' - \gamma'$ und $\alpha' - \gamma''$, mithin auch $\alpha', \gamma'', \alpha'', \gamma'$, da man $\alpha'' + \gamma'$ und $\alpha' + \gamma''$ kennt. Außer α, β, γ und ε ist gegeben:

189. a 193. a + c (112) 197. F (119)
190. e 194. a − c (113) 198. b + c + d (117)
191. a + b 195. f + e (114) 199. a + b + c + d (116).
192. a − b 196. f − e (115)

7. $\beta', \delta', \beta'', \alpha + \beta = \sigma$. 1. Aufl. Man findet leicht δ''. Nach (I) ist $\frac{\sin\alpha \sin\alpha''}{\sin\gamma \sin\alpha'} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}$, und man kann auf diese Gleichung ein ähnliches Verfahren anwenden, wie in 6), 1. Aufl. Zu beachten ist dabei, daß man $\alpha - \alpha''$ und $\gamma + \alpha'$ kennt. Man findet schließlich mit Hülfe von § 3, 6 $\alpha + \alpha''$ und $\gamma - \alpha'$, somit auch $\alpha, \alpha'', \gamma, \alpha'$ selbst. Auch die Gleichungen (II), (III), (IV) lassen sich zur Auflösung benutzen. 2. Aufl. Ähnlich wie in 6), 2. Aufl., findet man $\alpha - \beta$ und $\delta - \gamma$, mithin auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst aus (VI). Außer $\beta', \beta'', \delta', \alpha + \beta$ ist gegeben:

200. a 204. a − b 208. f − e (115)
201. b 205. a + c (112) 209. F (119)
202. e 206. a − c (113) 210. b + c + d (117)
203. a + b 207. f + e (114) 211. a + b + c + d (116).

i) Die folgenden Aufgaben werden gebildet, indem man die unter a) 1 bis 15 angeführten Stücke kombiniert mit

α) α', β'' γ) δ, γ' ε) β'', γ'' η) α, β''
β) δ, ε δ) δ, δ'' ζ) α', δ' ϑ) γ, α'.

Nach Berechnung von α'' und β' sind die Aufgaben in dem Fall α) auf h, 2), in den Fällen β), γ), δ) auf h, 3), in ε) bis ϑ) auf h, 4) zurückgeführt. Als besonderes Beispiel diene

212. a, b, β, α', β'' (Pothenotsche Aufgabe) (§ 42, 11). Will man α'' und β' nicht berechnen, so kann man auch der ersten Gleichung in h, 7) die Form $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b \sin\alpha'}{a \sin\beta''}$ geben. Ähnliches ist auch auf einzelne der anderen Aufgaben anwendbar.

k) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter i) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den durch Kombination dort gebildeten Aufgaben.

213. a, b, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3) 216. a − b, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)
214. a, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3) 217. $a^2 - b^2$, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3).
215. a + b, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)

l) Folgende Aufgaben werden gebildet, indem man die unter a) 1 bis 15 angeführten Stücke kombiniert mit

α) f, δ. Aufl. Nach Berechnung von △ ABC ist $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{a}{f}$,

Hosted by Google

$\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma} = \frac{b}{f}$, ferner $\alpha' + \beta''$ und $\alpha + \gamma$ bekannt, daher α', β'', α, γ nach § 9, 9 zu berechnen.

β) c, α'. Aufl. Nach Berechnung von △ ABC ist $\frac{\sin\gamma'}{\sin\beta''} = \frac{c}{b}$, $\frac{\sin\gamma''}{\sin\delta} = \frac{e}{f}$, ferner $\gamma'' - \gamma'$ und $\delta - \beta''$ bekannt, daher γ', γ'', β'', δ nach § 9, 10 zu berechnen.

γ) d, β''. Aufl. wie β).

m) Besondere Aufgaben.

218. a, c, α', γ', $\beta + \gamma = \sigma$. Aufl. Durch Multiplikation von $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ und $\frac{f}{c} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$ erhält man $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\gamma'}{c\sin\alpha'}$, ferner ist $\gamma - \alpha = \sigma + \alpha' - \gamma' - \pi$ (§ 7, 2).

219. a, c, β', γ', δ'. Aufl. Durch Multiplikation von $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ erhält man $\sin\alpha''\sin\beta'' = \frac{a\sin\beta'\sin\gamma'}{c}$, ferner ist $\alpha'' + \beta'' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§ 6, 1).

220. a, c, α, δ, γ'. Aufl. wie 218. Es ist $\sin\alpha'\sin\gamma = \frac{a\sin\gamma'\sin\alpha}{c}$ und $\gamma - \alpha' = \pi - \gamma' - \delta$ (§ 6, 2).

221. a, c, ε, α', γ'. Aufl. Aus der in 219 entwickelten Gleichung erhält man $\frac{\sin\beta''}{\sin\beta'} = \frac{a\sin\gamma'}{c\sin\alpha''}$ und auf ähnliche Weise, indem man die Verhältnisse $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{c}$ miteinander multipliziert, erhält man $\frac{\sin\delta'}{\sin\delta''} = \frac{a\sin\gamma''}{c\sin\alpha'}$. Da ferner $\beta'' + \delta' = \pi - \varepsilon$ und $\beta' + \delta'' = \pi - \varepsilon$ ist, erhält man β'', β', δ', δ'' nach § 9, 5.

222. e, f, α, β, ε. Aufl. Durch Multiplikation von $\frac{e}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha''}$ und $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ erhält man $\frac{e}{f} = \frac{\sin\beta\sin\alpha'}{\sin\alpha\sin\alpha''}$, folglich ist $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{e\sin\alpha}{f\sin\beta}$, ferner $\alpha' + \alpha'' = \pi + \varepsilon - \alpha - \beta$ (§ 7, 1).

223. e, f, α, α'', γ'. Aufl. Wie in 222 erhält man $\sin\beta\sin\alpha' = \frac{e\sin\alpha\sin\alpha''}{f}$, ferner $\beta + \alpha' = \pi + \varepsilon - \alpha - \alpha''$ (§ 6, 1).

224. e, f, α, β, γ. Aufl. Wie in 222 erhält man $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{e\sin\alpha}{f\sin\beta}$

Hosted by Google

und auf ähnliche Weise $\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''} = \frac{e\sin\gamma}{f\sin\delta}$. Ferner ist $\alpha' - \gamma' = \pi - \alpha - \beta$ und $\alpha'' - \gamma'' = \pi - \alpha - \beta$; daher α', γ', α'', γ'' nach § 9, 6 zu berechnen.

225. F, e, f, α, β. Aufl. ε zu finden, dann (222).

226. F, e, α, β, ε. Aufl. f zu finden, dann (225).

227. F, f + e, α, β, ε. Aufl. ef, mithin e und f nach § 10 zu finden, dann (225).

228. F, f − e, α, β, ε (227)

229. F, e, f, α, α'' (225, 223)

230. F, e, α, α'', γ' (226, 223)

231. F, f + e, α, α'', γ' (227, 223)

232. F, f − e, α, α'', γ' (227, 223).

233. a, b, α', β'', γ''. Aufl. Aus $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ und $\frac{f}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta''}$ erhält man durch Multiplikation $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta''}{b\sin\alpha'}$. Ferner ist $\frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$ und $\gamma - \alpha'' = \delta' = \pi - \alpha' - \beta'' - \gamma''$, $\alpha - \beta' = \gamma''$, daher γ, α'', α, β' nach § 9, 10 zu berechnen.

234. a, f, δ, α'', γ''. Aufl. Ähnlich wie in 233 erhält man die Gleichungen $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{a}{f}$, $\frac{\sin\beta''}{\sin\beta'} = \frac{a\sin\gamma}{f\sin\alpha''}$, $\alpha' + \beta'' = \delta$, $\alpha - \beta' = \gamma''$ (§ 9, 11).

235. a, b, c, d, F. Aufl. Es ist $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$, folglich $bc\cos\gamma - ad\cos\alpha = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)$ (I), ferner $bc\sin\gamma + ad\sin\alpha = 2F$ (II). Setzt man nun $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2) = R\cos\varphi$ und $2F = R\sin\varphi$, so findet man φ und R durch die Gleichungen $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4F}{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}$ (III) und $R = \frac{2F}{\sin\varphi}$ (IV), und die Gleichungen (I) und (II) gehen über in $bc\cos\gamma - ad\cos\alpha = R\cos\varphi$ (V), $bc\sin\gamma + ad\sin\alpha = R\sin\varphi$ (VI). Quadriert und addiert man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\cos(\gamma+\alpha) = \frac{b^2c^2 + a^2d^2 - R^2}{2abcd}$ (VII). Multipliziert man (V) mit $\sin\alpha$, (VI) mit $\cos\alpha$ und addiert, so erhält man $\sin(\varphi + \alpha) = \frac{bc\sin(\alpha+\gamma)}{R}$ (VIII); multipliziert man (V) mit $\sin\gamma$, (VI) mit $\cos\gamma$ und subtrahiert, so erhält man $\sin(\varphi - \gamma) = \frac{ad\sin(\alpha+\gamma)}{R}$ (IX). Zur Berechnung dienen nacheinander die Gleichungen (III), (IV), (VII), VIII) und (IX).

236. a, b, c, d, ε. Aufl. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen

Hosted by Google

heiße E. Nun ist $AE^2 + EB^2 - 2\,AE \cdot EB \cos\varepsilon = a^2$, $EB^2 + EC^2 + 2\,EB \cdot FC \cos\varepsilon = b^2$, $EC^2 + ED^2 - 2\,EC \cdot ED \cos\varepsilon = c^2$, $ED^2 + AE^2 + 2\,ED \cdot AE \cos\varepsilon = d^2$. Subtrahiert man die Summe der ersten und dritten Gleichung von der Summe der zweiten und vierten, so erhält man $2\,ef \cos\varepsilon = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$, folglich $F = \frac{1}{2}\,ef \sin\varepsilon = \frac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$. Die Aufgabe ist somit auf 235 zurückgeführt, oder man kann auch die Auflösung in ähnlicher Weise wie dort ausführen.

Vierter Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

In den Aufgaben der folgenden Paragraphen ist irgend eine Figur gegeben, und es sollen zu derselben Punkte, gerade Linien oder Kreise gesucht werden, die bestimmten, in der Aufgabe vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Soll ein Punkt gesucht werden, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, wenn man seine Entfernungen von zwei gegebenen Punkten oder auch seine Entfernung von einem gegebenen Punkte und den Winkel gefunden hat, den die von ihm nach diesem gegebenen Punkte gezogene Linie mit einer der Richtung nach gegebenen geraden Linie bildet. Wird ein Linie gesucht, die durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so genügt es, den Winkel zu berechnen, den sie mit einer durch diesen Punkt hindurchgehenden, der Richtung nach gegebenen Linie bildet. Soll die gesuchte Linie aber nicht durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, so sucht man erst in der oben angegebenen Weise einen Punkt, in welchem sie eine gegebene gerade Linie schneidet und den Winkel, den sie mit derselben bildet, oder man berechnet auch die Stücke, die sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels abschneidet. Soll endlich ein Kreis gesucht werden, so sucht man in der oben angegebenen Weise seinen Mittelpunkt und hat dann noch die Länge seines Radius zu berechnen. Sehr häufig tritt der Fall ein, daß je nach der Lage der gegebenen Stücke verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, die bei der Auflösung jeder für sich behandelt werden müssen. So kann z. B., wenn ein Winkel und ein Punkt gegeben ist, der Punkt innerhalb oder außerhalb des Winkels liegen; zwei gegebene Punkte können auf derselben oder auf verschiedenen

Hosted by Google

Seiten einer geraden Linie liegen. Sind zwei Kreise gegeben, so kann der eine außerhalb oder innerhalb des anderen liegen u. s. w. Von den dadurch entstehenden verschiedenen Fällen einer Aufgabe ist bei der im folgenden mitgeteilten Auflösung meistenteils nur einer behandelt worden. Die Berechnung der übrigen gestaltet sich stets mehr oder minder ähnlich und ist daher nicht besonders durchgeführt.

§ 38.

Gegeben gerade Linien, Punkte, Dreiecke; gesucht gerade Linien oder Punkte.

a) Gegeben sei $L \parallel L'$, P auf L, P′ auf L′, und P″ beliebig (hier zwischen L und L′). Durch P″ eine Linie XX′ (X auf L, X′ auf L′) so zu ziehen, daß sie gewissen Bedingungen genügt. Als bekannt sind anzusehen die von P″ respektive auf L und L′ gefällten Senkrechten $P''Q = a$, $P''Q' = a'$, $PQ = c$, $P'Q' = c'$. Gesucht $\angle QP''X = \varphi$.

Es ist $PX = c + a \operatorname{tg} \varphi$, $P'X' = c' - a' \operatorname{tg} \varphi$, $P''X = \frac{a}{\cos \varphi}$, $P''X' = \frac{a'}{\cos \varphi}$, $XX' = \frac{a + a'}{\cos \varphi}$. Setzt man diese Ausdrücke in die durch die Aufgabe gestellte Bedingungsgleichung ein, so kann man aus der so entstandenen Gleichung φ berechnen. Unter der angegebenen Bedingung XX′ durch P″ so zu ziehen, daß

1. $PX : P'X' = m : n$. Aufl. $n (c + a \operatorname{tg} \varphi) = m (c' - a \operatorname{tg} \varphi)$, daher $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c'm - cn}{a'm + an}$.
2. $PX + P'X' = s$.
3. $PX - P'X' = d$.
4. $PX \cdot P'X' = q^2$ (quadrat. Gleichung).
5. $XX' = PX + P'X'$ (§ 3, 1).
6. $P''X' = P'X'$ (§ 3, 1).
7. $P''X' : P'X' = m : n$ (§ 3, 1).
8. $P''X' = PX$ (§ 3, 1).
9. $P''X' : PX = m : n$ (§ 3, 1).
10. $P''X' - P''X = PX - P'X'$ (§ 3, 1).
11. $PX + P''X = P'X' + P''X'$ (§ 3, 1).
12. Umfang von Trapez $PP'X'X = s$. Aufl. PP′ leicht zu berechnen (§ 3, 1).
13. Inhalt von Trapez $PP'X'X = F$ (2).
14. PP′X′X ein Tangententrapez wird (§ 3, 1).

b) Gegeben ist $L \parallel L'$, P auf L, P′ auf L′, P″ auf PP′ (hier zwischen L und L′). Durch P″ die Linie XX′ (X auf L, X′ auf L′) so zu ziehen, daß sie gewissen Bedingungen genügt. Bekannt ist $PP'' = a$,

Hosted by Google

$P'P'' = a'$, und $\angle P''PX = \alpha$, gesucht $\angle PP''X = \varphi$. Es ist $PX = \frac{a \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)}$, $P'X' = \frac{a' \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)}$, $P''X = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)}$, $P''X' = \frac{a' \sin \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)}$, $\triangle PP''X = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \varphi}{2 \sin (\alpha + \varphi)}$, $\triangle P'P''X' = \frac{a'^2 \sin \alpha \sin \varphi}{2 \sin (\alpha + \varphi)}$. Diese Werte sind in die Bedingungs-Gleichungen der Aufgabe einzusetzen und aus der so entstandenen Gleichung ist φ zu berechnen.

XX' durch P'' so zu ziehen, daß

15. $PX + P'X' = s$. Aufl. $\frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{a + a'}{s}$ (§ 7, 2).

16. $PX - P'X' = d$ (15). 17. $P''X + P''X' = s$.

18. $P''X - P''X' = d$.

19. $PX \cdot P'X' = q^2$. Aufl. $\frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{aa'}}{q}$ (§ 7, 2).

20. $P''X \cdot P''X' = q^2$.

21. $\triangle PP''X + \triangle P'P''X' = s^2$. Aufl. $\frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{(a^2 + a'^2) \sin \alpha}{s^2}$ (§ 7, 2).

22. $\triangle PP''X - \triangle P'P''X' = d^2$ (21).

23. $PX + P'X' + P''X + P''X' = s$. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)} = \frac{a + a'}{s}$ (§ 7, 11).

24. Gegeben sei L, und P und P' auf derselben Seite von L. X auf L so zu bestimmen, daß PX und P'X mit L gleiche Winkel bilden. Bekannt sind die auf L gefällten Lote $PQ = a$, $P'Q' = a'$, $QQ' = c$, gesucht $\angle PXQ = P'XQ' = \varphi$. Aufl. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a + a'}{c}$.

25. Gegeben sei L, und P und P' auf verschiedenen Seiten von L. Auf L den Punkt X so zu bestimmen, daß $\angle PXP'$ durch L halbiert wird. Aufl. ähnlich wie 24.

26. Gegeben sei $\angle BAC = \alpha$ und innerhalb desselben P und P'. (Bekannt die Lote $PB = a$, $P'C = a'$, $AB = b$, $AC = b'$). Die gebrochene Linie $PXX'P'$ (X auf AB, X' auf AC) so zu ziehen, daß $\angle PXB = X'XA$ und $\angle XX'A = P'X'C$ wird. Aufl. Gesucht wird $\angle PXB = \varphi$, $\angle P'X'C = \varphi'$. Aus $AX = b - a \cot \varphi$, $AX' = b' - a' \cot \varphi'$ und $AX : AX' = \sin \varphi' : \sin \varphi$ erhält man $b \sin \varphi - a \cos \varphi = b' \sin \varphi' - a' \cos \varphi'$, oder,

Hosted by Google

wenn man die Hülfswinkel $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \varkappa' = \frac{a'}{b'}$ einführt, $\frac{\sin(\varphi - \varkappa)}{\sin(\varphi' - \varkappa')} = \frac{b' \cos \varkappa}{b \cos \varkappa'}$ (§ 7, 1).

c) Gegeben $\angle BAC = \alpha$, P auf AC ($PA = a$). Man soll die Linie XY, welche AB in Y unter $\angle \beta$ schneidet, so ziehen, daß

27. $PX : PY = m : n$ (Sinussatz für $\triangle PXY$, gesucht $\angle XPY = \varphi$).
28. $XY : PY = m : n$ (27).
29. $PX : XY = m : n$ (27), (§ 7, 2).

d) Ein Dreieck ABC zu berechnen, wenn $\angle ACB = \gamma$ der Größe und Lage nach gegeben ist, und AB durch P (hier innerhalb $\angle ACB$) gehen und dabei gewisse Bedingungen erfüllen soll. Bekannt ist $CP = t$, $\angle ACP = \varepsilon$, $\angle BCP = \zeta$, gesucht außer den fehlenden Dreiecksstücken noch $\angle APC = \varphi$. Es ist $AP = \frac{t \sin \varepsilon}{\sin \alpha} = \frac{t \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)}$, $BP = \frac{t \sin \zeta}{\sin \beta} = \frac{t \sin \zeta}{\sin(\varphi - \zeta)}$, $a = \frac{t \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{t \sin \varphi}{\sin(\varphi - \zeta)}$, $b = \frac{t \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{t \sin \varphi}{\sin(\varphi + \varepsilon)}$, $c = \frac{t \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{t \sin \varphi \sin \gamma}{\sin(\varphi + \varepsilon) \sin(\varphi - \zeta)}$. Für die Aufgaben 37 bis 43 empfiehlt es sich, die gegebenen Stücke wie in § 14 durch r, γ und $\alpha - \beta = \delta$ auszudrücken. Setzt man $\varepsilon - \zeta = \delta'$, so ist $t = \frac{h_c}{\sin \varphi}$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$, folglich nach § 14 $t = \frac{2 r \sin \alpha \sin \beta}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)} = \frac{r(\cos \delta + \cos \gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)} = \frac{2 r (\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)} = \frac{2 r (\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \sin \frac{1}{2}\delta^2)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}$. Durch Einsetzung der betreffenden Werte in die Bedingungsgleichung erhält man eine Gleichung, aus der φ oder α und β zu berechnen sind. In 37 bis 42 ist r aus der Gleichung für t und der für das gegebene Stück (§ 14) zu eliminieren. AB durch P so zu ziehen, daß

30. $AC = AB$
31. $AC = BC$
32. $PA = PB$ (§ 7, 1)
33. $PA : PB = m : n$ (§ 7, 1)
34. $AC : BC = m : n$ (§ 7, 1)
35. $AC : AB = m : n$
36. $PA \cdot PB = q^2$ (§ 6, 1).
37. $AC + BC = s$. 1. Aufl. $2 t \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) - s \cos \delta = s \cos \gamma - 2 t \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\delta'$ (§ 3, 4). 2. Aufl. Man ziehe $PD \parallel AC$ bis zu BC und $PE \parallel BC$ bis zu AC, so sind $PD = EC$ und $PE = DC$ zu berechnen, daher $AE + DB$ bekannt und $AE \cdot DB = PE \cdot PD$ (§ 10).

Hosted by Google

38. $BC - AC = d$. 1. Aufl. $(2t \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta' - d) \cos \delta + 2t \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\delta' \sin \delta = d \cos \gamma + 2t \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta'$ (§ 3, 1). 2. Aufl. wie 37, 2. Aufl.

39. $AC \cdot BC = q^2$. 1. Aufl. $t^2 \cos(\delta' + \delta) - q^2 \cos \delta = q^2 \cos \gamma - t^2$ (§ 3, 4). 2. Aufl. $\cot \varphi^2 - \frac{\sin(\varepsilon - \zeta)}{\sin \varepsilon \sin \zeta} \cot \varphi + \frac{t^2 - q^2 \cos \varepsilon \cos \zeta}{q^2 \sin \varepsilon \sin \zeta} = 0$.

40. $AB + BC + CA = 2s$. Aufl. $s \cos \frac{1}{2}\delta - t \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = s \sin \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 4).

41. Inhalt von $ABC = \triangle$ (39).

42. ρ gegeben. Aufl. $t \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) - \rho \cos \frac{1}{2}\delta = \rho \sin \frac{1}{2}\gamma$ (§ 3, 4).

43. ρ_c gegeben (42). 44. ρ_a gegeben (42).

45. Vom Punkte C gehen L, L', L'' aus. Eine dieselben resp. in A, D, B schneidende Gerade so zu ziehen, daß $AD = e$, $DB = f$ wird. Bekannt $\angle ACD = \varepsilon$, $\angle DCB = \zeta$, e, f; gesucht α, β. Aufl. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{f \sin \varepsilon}{e \sin \zeta}$ (§ 7, 1).

e) Das Dreieck ABC zu berechnen, wenn $AB = c$ der Lage und Größe nach gegeben ist und C auf der der Lage nach gegebenen Geraden L liegen soll. L schneide (die Verlängerung von) AB in D. Bekannt ist außer c noch $BD = f$ und $\angle BDC = \varkappa$. Auch die auf L gefällten Lote $AE = k$, $BF = l$, ebenso $EF = g$ kann man als bekannt ansehen, da sich diese Stücke aus c, f, $\varkappa$ leicht berechnen lassen. Gesucht werden außer den Dreiecksstücken noch $\angle BCD = \beta'$ und $\pi - ACD = \alpha'$. Es ist $f = \frac{a \sin \beta'}{\sin \varkappa} = \frac{c \sin \alpha \sin \beta'}{\sin \gamma \sin \varkappa}$, $f + c = \frac{b \sin \alpha'}{\sin \varkappa} = \frac{c \sin \beta \sin \alpha'}{\sin \gamma \sin \varkappa}$, oder, da $\beta' = \beta - \varkappa$, $\alpha' = \alpha + \varkappa$ ist, $f = \frac{c \sin \alpha \sin(\beta - \varkappa)}{\sin \gamma \sin \varkappa}$ (I) und $f + c = \frac{c \sin \beta \sin(\alpha + \varkappa)}{\sin \gamma \sin \varkappa}$ (II). Durch Addition beider Gleichungen findet man noch $\frac{2f + c}{c} = \frac{\cos(\varkappa + \delta) + \cos \gamma \cos \varkappa}{\sin \gamma \sin \varkappa}$ (III). Zu beachten sind noch die Formeln $a = \frac{l}{\sin \beta'}$ (IV), $b = \frac{k}{\sin \alpha'}$ (V), $g = k \cot \alpha' + l \cot \beta'$ (VI). Die drei ersten Aufgaben sind mittelst der Hauptfälle zu lösen.

$\triangle ABC$ zu berechnen, wenn gegeben

46. h_c. 47. p. 48. q. 49. γ (III) (§ 3, 2).

Hosted by Google

50. δ (III) (§ 3, 1). 51. r (49).

52. u, v. Aufl. Durch Division der Ausdrücke für f und f + c ergiebt sich $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{(f+c)\,u}{fv}$, ferner ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$ und $\alpha' - \alpha = \varkappa$, $\beta' - \beta = -\varkappa$ (§ 9, 6).

53. a + b = s. Aufl. Aus $\frac{k}{\sin\alpha'} + \frac{l}{\sin\beta'} = s$ und (VI) ergiebt sich durch Elimination von β' $(k^2 - l^2 + s^2 - g^2)\sin\alpha' + 2gk\cos\alpha' = 2sk$ (§ 3, 1).

54. a − b = d (53).

Unter denselben Umständen wie bisher $\triangle$ ABC zu berechnen, wenn die Bedingung gegeben, daß

55. AC = BC. Aufl. In (III) ist $\delta = 0$ zu setzen.

56. $\alpha = 2\beta$. Aufl. In $\frac{f+c}{f} = \frac{\sin(\alpha+\varkappa)\sin\beta}{\sin(\beta-\varkappa)\sin\alpha}$ setze man 2β für α ein. Es ergiebt sich $c\cos\varkappa\sin 2\beta - (2f+c)\sin\varkappa\cos 2\beta = (f+c)\sin\varkappa$ (§ 3, 1).

57. $\alpha' = 2\beta'$. 1. Aufl. $\frac{f+c}{f} = \frac{\sin\beta\sin\alpha'}{\sin\alpha\sin\beta'} = \frac{\sin(\beta'+\varkappa)\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\varkappa)\sin\beta'}$ $= \frac{\sin(\beta'+\varkappa)\sin 2\beta'}{\sin(2\beta'-\varkappa)\sin\beta'} = \frac{2\sin(\beta'+\varkappa)\cos\beta'}{\sin(2\beta'-\varkappa)}$, daraus $c\cot\varkappa\sin 2\beta' - (2f+c)\cos 2\beta' = f$ (§ 3, 1). 2. Aufl. In (VI) $\alpha' = 2\beta'$ gesetzt, giebt $\cot\beta'^2 - \frac{2g}{k+2l}\cot\beta' - \frac{k}{k+2l} = 0$.

58. Gegeben sind vier Punkte A, E, F, B in gerader Linie (AE = d, EF = e, FB = f). Über AB als Grundlinie ein Dreieck ABC so zu konstruieren, daß $\angle$ ACB durch CE und CF in drei gleiche Teile geteilt wird. Aufl. Setzt man $\angle$ CEF = λ, CFE = μ, so erhält man zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ die fünf Gleichungen $\frac{\sin\alpha}{\sin\mu} = \frac{e}{d}$, $\frac{\sin\beta}{\sin\lambda} = \frac{e}{f}$, $\lambda = \alpha + \frac{1}{3}\gamma$, $\mu = \beta + \frac{1}{3}\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Mittelst der drei letzten Gleichungen, aus denen noch $\lambda + \mu = \pi - \frac{1}{3}\gamma$, $\lambda - \mu = \alpha - \beta$ folgt, kann man sämtliche Winkel durch γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausdrücken. Man erhält $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$, $\beta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$, $\lambda = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma - \delta)$, $\mu = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma + \delta)$. Durch Einsetzen dieser Werte in die beiden ersten Gleichungen entsteht $\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma+\delta)} = \frac{e}{d}$, $\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma-\delta)} = \frac{e}{f}$ und durch bekannte Entwicklung $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\gamma \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma - \delta) = \frac{d-e}{d+e}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\gamma \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\gamma + \delta) = \frac{f-e}{f+e}$.

Hosted by Google

Nach Elimination von δ mit Hülfe der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma-\delta\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma+\delta\right)\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma-\delta\right)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma+\delta\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma-\delta\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\gamma+\delta\right)}$ ergiebt sich schließlich $\cos\frac{1}{3}\gamma^2 = \frac{(f+e)\,(d+e)}{4\,fd}$.

f) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch die Spitze C eine Linie (hier innerhalb $\angle$ ACB) so zu ziehen, daß, nachdem auf dieselbe die Senkrechten AX und BY gefällt sind, die Stücke AX, BY, CX, CY, $\triangle$ ACX, $\triangle$ BCY noch irgend einer in der Aufgabe gestellten Bedingung genügen. Bekannt sind sämtliche Stücke von $\triangle$ ABC (die nicht direkt gegebenen sind erst zu berechnen), gesucht wird $\angle$ ACX $= \varphi$, $\angle$ BCY $= \psi$, wobei $\varphi + \psi = \gamma$. Es ist $AX = b\sin\varphi$, $BY = a\sin\psi$, $CX = b\cos\varphi$, $CY = a\cos\psi$. Zuweilen ist es vorteilhaft, sämtliche gegebenen Stücke durch den Radius r des ABC umschriebenen Kreises und die Winkel γ, $\alpha-\beta=\delta$, $\varphi-\psi=\vartheta$ auszudrücken. So ist u. a. $AX + BY = b\sin\varphi + a\sin\psi = 2r\,(\sin\beta\sin\varphi + \sin\alpha\sin\psi)$; nach Einsetzung der Werte $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\gamma-\delta)$, $\beta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\gamma+\delta)$, $\varphi = \frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)$, $\psi = \frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)$ erhält man $AX + BY = 2r\left(\cos\frac{1}{2}(\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta) + \cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)\right) = r\left\{\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)\right) - \sin\frac{1}{2}(\delta-\vartheta) + \sin\left(\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)\right) + \sin\frac{1}{2}(\delta-\vartheta)\right\} = 2r\sin\gamma\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = c\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)$. Ähnlich leitet man $XY = CY - CX = 2r\sin\gamma\sin\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = c\sin(\delta+\vartheta)$ her. Die entsprechenden Ausdrücke für $AX - BY$ und $CX + CY$ fallen minder einfach aus.

Unter den obigen Bedingungen durch C eine Linie so zu ziehen, daß

59. $AX = BY$ (§ 7, 1)
60. $AX : BY = m : n$ (§ 7, 1)
61. $CX : CY = m : n$ (§ 7, 5)
62. $CX = BY$ (§ 7, 3)
63. $CX : BY = m : n$ (§ 7, 3)
64. $AX \cdot BY = q^2$ (§ 6, 1)
65. $CX \cdot CY = q^2$ (§ 6, 5)
66. $AX \cdot CY = q^2$ (§ 6, 3).
67. $AX + BY = s$ (§ 3, 3). 2. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = \frac{s}{c}$.
68. XY gegeben (67).
69. $AX - BY = d$ (§ 3, 3).
70. $CX + CY = s$ (§ 3, 5).
71. $AX + BY = CX + CY$. Aufl. $b\sin\varphi + a\sin\psi = b\cos\varphi + a\cos\psi$ oder $b(\sin\varphi - \cos\varphi) = a(\cos\psi - \sin\psi)$, daher $\frac{\sin(\varphi-\frac{1}{4}\pi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi-\psi)} = \frac{a}{b}$ (§ 7, 2).
72. $BY - AX = XY$ (71).
73. $AX + BY = XY$ (71). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = 1$, daher $\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = \frac{1}{4}\pi$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \delta$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \gamma - \frac{1}{2}\pi$.

Hosted by Google

74. $BY - AX = CX + CY$ (71). 2. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{4}\pi) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$.

75. $AX + BY : CX + CY = m : n$. Aufl. $n(b \sin\varphi + a \sin\psi) = m(b \cos\varphi + a \cos\psi)$, oder $b(n \sin\varphi - m \cos\varphi) = a(m \cos\psi - n \sin\psi)$. Dividiert man durch n und setzt $\frac{m}{n} = \operatorname{tg}\chi$, so erhält man $\frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\chi-\psi)} = \frac{a}{b}$ (§ 7, 2). 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{n\sin\gamma - m\cos\gamma}{m}$ (§ 3, 2 und § 7, 5).

76. $BY - AX : XY = m : n$ (75).

77. $BY + AX : XY = m : n$ (75). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = \frac{n}{m}$.

78. $BY - AX : CX + CY = m : n$ (75).

79. $AX \cdot BY : CX \cdot CY = m : n$ (§ 6, 7).

80. $AX \cdot CY : BY \cdot CX = m : n$ (§ 6, 9).

81. $\triangle ACX = \triangle BCY$. Aufl. $\triangle ACX = \frac{1}{4}b^2 \sin 2\varphi$, $\triangle BCY = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\psi$, daher $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi} = \frac{a^2}{b^2}$ (§ 7, 1).

82. $\triangle ACX : BCY = m : n$ (81).

83. $\triangle ACX + \triangle BCY = F$ (81), (§ 3, 3).

84. $\triangle ACX - \triangle BCY = F$ (81), (§ 3, 3).

85. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch C nach AB eine Linie CX so zu ziehen, daß $AX : CX = CX : BX$. Aufl. Setzt man $\angle ACX = \varphi$, $BCX = \psi$, so ist $\sin\varphi \sin\psi = \sin\alpha \sin\beta$ (§ 6, 1).

g) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Auf AB einen Punkt Z (hier zwischen A und B) so zu bestimmen, daß, wenn $ZX \perp AC$ und $ZY \perp BC$ gefällt werden, noch einer in der Aufgabe gestellten Bedingung genügt wird. Bekannt sind sämtliche Stücke des Dreiecks, gesucht wird $CZ = t$, $\angle ACZ = \varphi$, $\angle BCZ = \psi$. Ferner werde $\varphi - \psi$ mit ϑ bezeichnet. Sämtliche Strecken des Dreiecks (ZX, CX, AZ ꝛc.) lassen sich durch den Radius r des umgeschriebenen Kreises und die Winkel oder, was oft vorteilhafter ist, durch r, γ, $\alpha - \beta = \delta$ und $\varphi - \psi = \vartheta$ ausdrücken. Es ist $AZ = \frac{b \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}(\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$, $BZ = \frac{a\sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$; $XZ = t\sin\varphi = AZ\sin\alpha = \frac{b\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{r(\cos\delta+\cos\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{h_c\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$; $YZ = t\sin\psi$

Hosted by Google

$= BZ \sin\beta = \frac{a \sin\beta \sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} =$
$\frac{r(\cos\delta+\cos\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{h_c \sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$; $AX =$
$AZ\cos\alpha = \frac{2r\cos\alpha\sin\beta\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r\cos\alpha\sin\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} =$
$\frac{r(\sin\gamma-\sin\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$; $BY = BZ\cos\beta = \frac{2r\sin\alpha\cos\beta\sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} =$
$\frac{2r\sin\alpha\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{r(\sin\gamma+\sin\delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$;
$CX = t\cos\varphi = ZX\cot\varphi = \frac{b\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} =$
$\frac{2r\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{r(\cos\delta+\cos\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} =$
$\frac{h_c\cos\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$; $CY = t\cos\psi = ZY\cot\psi = \frac{a\sin\beta\cos\psi}{\sin(\beta+\psi)}$
$= \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\cos\psi}{\sin(\beta+\psi)} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$
$= \frac{r(\cos\delta+\sin\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{h_c\cos\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$;
$t = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{r(\cos\delta+\cos\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)} = \frac{h_c}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$.

Zu beachten iſt noch $\sin(\alpha+\varphi) = \sin(\beta+\psi)$.

Unter den obigen Bedingungen Z auf AB ſo zu beſtimmen, daß

86. $ZX : ZY = m : n$ (§ 7, 1)
87. $CX : CY = m : n$ (§ 7, 5)
88. $AX = BY$ (§ 7, 1)
89. $AX : BY = m : n$ (§ 7, 1)
90. $AZ = YZ$ (§ 7, 1)
91. $AZ : YZ = m : n$ (§ 7, 1)
92. $AZ = CX$
93. $AZ : CX = m : n$
94. $AZ = CY$ (§ 7, 3)
95. $AZ : CY = m : n$ (§ 7, 3)
96. $AZ = BY$ (§ 7, 1)
97. $AZ : BY = m : n$ (§ 7, 1)
98. $XZ = BY$ (§ 7, 1)
99. $XZ : BY = m : n$ (§ 7, 1)
100. $XZ : CY = m : n$ (§ 7, 3)
101. $BY = CX$ (§ 7, 3)
102. $BY : CX = m : n$ (7, 3)
103. $BY = CZ$
104. $BY : CZ = m : n$
105. $CX : CY = AX : BY$ (§ 6, 9)
106. $CX : CY = BY : AX$ (§ 7, 1)
107. $CX \cdot CY = AX \cdot BY$ (§ 6, 7)
108. $CX \cdot CY : ZX \cdot ZY = m : n$ (§ 6, 11).
109. $CX \cdot CY : AX \cdot BY = m : n$ (§ 6, 7).
110. $CX \cdot AX : CY \cdot BY = m : n$ (§ 7, 1).
111. $XZ + XY = s$. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2h_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{s}$ (§ 7, 6).

Hosted by Google

112. $XZ - YZ = d$. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2\,h_c\cos\frac{1}{2}\gamma}{d}$ (§ 7, 4).

113. $CX + CY = s$. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2\,h_c\cos\frac{1}{2}\gamma}{s}$ (§ 7, 6).

114. $CY - CX = d$. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2\,h_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{d}$ (§ 7, 4).

115. $AX + BY = s$. Aufl. $s = \frac{2r}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}(\cos\alpha\sin\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)$ $+ \sin\alpha\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta) = \frac{2r}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}(\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\vartheta$ $-\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta\sin\frac{1}{2}\vartheta)$. Dividiert man durch $\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta$ und führt den Hülfswinkel λ ein durch die Gleichung $\cot\lambda = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta}$ $= \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin\delta}$, so wird $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos(\lambda+\frac{1}{2}\vartheta)} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta}{s\sin\lambda}$ $= \frac{2r\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\gamma}{s\cos\lambda}$ (§ 7, 6).

116. $AX - BY = d$ (115). 117. $XZ + YZ = CZ$ (§ 4, 1).

118. $CX + CY = CZ$ (§ 4, 5).

119. $AX + BY = CZ$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\vartheta - \cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta\sin\frac{1}{2}\vartheta$ $= \sin\alpha\sin\beta$ (§ 3, 1).

120. $BY - AX = CZ$ (119).

121. $CX + CY = AX + BY$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\psi-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§ 7, 2).

122. $CX - CY = AX - BY$ (121).

123. $CX - CY = BY - AX$ (121).

124. $CX+CY+ZX+ZY=s$. Aufl. $s=\frac{2h_c\cos\frac{1}{2}\vartheta(\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$, daher $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2\sqrt{2}\,h_c\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\gamma)}{s}$ (§ 7, 6).

125. $XZ \cdot YZ = q^2$. Aufl. $h_c^2\cos\vartheta - q^2\cos(\delta+\vartheta) = q^2 + h_c^2\cos\gamma$ (§ 3, 6).

126. $CX \cdot CY = q^2$. Aufl. $h_c^2\cos\vartheta - q^2\cos(\delta+\vartheta) = q^2 - h_c^2\cos\gamma$ (§ 3, 6).

127. $AX \cdot BY = q^2$. Aufl. $\cos\vartheta - \frac{q^2}{r^2\sin2\alpha\sin2\beta}\cos(\delta+\vartheta)$ $= \cos\gamma + \frac{q^2}{r^2\sin2\alpha\sin2\beta}$ (§ 3, 1 oder 5).

128. $CX - AX : CY - BY = m : n$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\psi)} = \frac{ma}{nb}$ (§ 7, 1).

Hosted by Google

129. $\triangle CXZ = F$. Aufl. $F = \frac{h_c^2 \sin(\gamma+\vartheta)}{4\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)^2}$, daher $h_c^2 \sin(\gamma+\vartheta) - 2F\cos(\delta+\vartheta) = 2F$ (§ 3, 3).

130. $\triangle CXZ : \triangle CYZ = m:n$. Aufl. $\frac{\sin(\gamma+\vartheta)}{\sin(\gamma-\vartheta)} = \frac{m}{n}$ (§ 7, 1.)

131. $\triangle AXZ = \triangle BYZ$. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cot\beta}$ (§ 7, 1).

h) Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine Linie CZ (Z auf AB) in zwei Teile zu teilen, die einer gegebenen Bedingung genügen. Bekannt sind die Elemente von $\triangle ABC$, gesucht $CZ = t$, $\angle ACZ = \varphi$, $BCZ = \psi$ oder $\varphi - \psi = \vartheta$.

Die Linie CZ so zu ziehen, daß $\triangle ACZ$ und BCZ

132. einander gleich sind. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{a}{b}$ (§ 7, 1).

133. sich wie $m:n$ verhalten (132).

134. gleiche Radien innerer Berührungskreise haben. Aufl. Der Radius des inneren Berührungskreises von $\triangle ACZ$ ist $\frac{t}{\cot\frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)}$ und für $\triangle BCZ$ ist er $\frac{t}{\cot\frac{1}{2}\psi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\psi)}$, daher $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\varphi) - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\psi) = \cot\frac{1}{2}\psi - \cot\frac{1}{2}\varphi$. Nach weiterer Entwicklung, und indem man schließlich sämtliche Winkel durch γ, $\delta = \alpha - \beta$ und ϑ ausdrückt, ergiebt sich $\sin\frac{1}{2}(\delta+\vartheta) = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$.

135. gleiche Radien äußerer Berührungskreise an AZ und BZ haben (134).

i) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Es soll eine Linie gezogen werden, die AC in X, BC in Y und die Verlängerung von AB in Z schneidet und dabei noch andere Bedingungen erfüllt. Bekannt sind die Elemente von $\triangle ABC$, gesucht $\angle BZY = \varphi$, AX, BY, XY. Indem man von X und Y Lote auf AB fällt, leitet man leicht die Gleichungen $AX\sin\alpha - BY\sin\beta = XY\sin\varphi$ und $AX\cos\alpha + BY\cos\beta = c - XY\cos\varphi$ her. Zu diesen Gleichungen liefert die Bedingung der Aufgabe stets noch zwei andere Gleichungen, so daß vier Gleichungen zur Bestimmung von AX, BY, XY, φ vorhanden sind.

Die Linie XYZ so zu ziehen, daß

136. $AX = BY = XY$. Aufl. $\sin\varphi = \sin\alpha - \sin\beta$.

137. $AX : BY : XY = m:n:p$. Aufl. $\sin\varphi = \frac{m\sin\alpha - n\sin\beta}{p}$.

138. $AX + BY = XY$, $AX : BY = m:n$ (137).

138. $AX - BY = XY$, $AX : BY = m:n$ (137).

Hosted by Google

140. $XY = f$ und $AX + BY = s$. Aufl. $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\delta) = \frac{c\cos\frac{1}{2}\delta - s\sin\frac{1}{2}\gamma}{f}$.

141. $XY = f$ und $AX - BY = d$. Aufl. $\sin(\varphi + \frac{1}{2}\delta) = \frac{d\cos\frac{1}{2}\gamma + c\sin\frac{1}{2}\delta}{f}$.

142. $XY = f$, $AX = BY$. Aufl. $\sin(\varphi + \frac{1}{2}\delta) = \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{f}$.

143. $XY = f$, $CX = BY$ (140).

144. Gegeben ist $\triangle ABC$. Eine Linie XZY (X auf der Verlängerung von AC über A hinaus, Y auf BC, Z auf AB) so zu ziehen, daß XZ und YZ den gegebenen Linien k und m gleich werden. Gesucht $\angle AZX = \varphi$. Aufl. $AZ = \frac{k\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}$, $BZ = \frac{m\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta}$, mithin $k\sin\beta\sin(\alpha-\varphi) + m\sin\alpha\sin(\beta+\varphi) = c\sin\alpha\sin\beta$, daher $(k+m)\cos\varphi - (k\cot\alpha - m\cot\beta)\sin\varphi = c$.

k) Innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt Z zu bestimmen, der noch gegebenen Bedingungen genügt. Bekannt sind die Stücke von $\triangle ABC$, gesucht $\angle BAZ = \alpha_1$, $CAZ = \alpha_2$, $CBZ = \beta_1$, $ABZ = \beta_2$, $ACZ = \gamma_1$, $BCZ = \gamma_2$.

Den Punkt Z so zu bestimmen, daß

145. die von ihm auf BC, CA, AB gefällten Senkrechten sich wie k:l:m verhalten. Aufl. $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{l}{m}$ (§ 7, 1) u. s. w.

146. $\triangle BCZ = CAZ = ABZ$. Aufl. $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c}{b}$ u. s. w. (§ 7, 1).

147. $\triangle BCZ : CAZ : ABZ = k:l:m$ (146).

148. $AZ + CZ = s$, $BZ + CZ = s'$. Aufl. $\frac{AZ}{b} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_2+\gamma_1)}$, $\frac{CZ}{b} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2+\gamma_1)}$, mithin $\frac{s}{b} = \frac{\sin\alpha_2+\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_2+\gamma_1)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\gamma_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\gamma_1)}$ oder $\frac{s-b}{s+b} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma_1$ (I), ebenso $\frac{s'-a}{s'+a} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma_2$ (II). Setzt man ferner der Abkürzung halber $s' - s = d$, so ist $BZ - AZ = d$, und man leitet ähnlich wie vorher $\frac{c-d}{c+d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1}$ (III) her. Diese drei Gleichungen (I, II, III) in Verbindung mit $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ sind ausreichend zu Berechnung der sechs unbekannten Winkel. Setzt

Hosted by Google

man den aus (II) entwickelten Wert von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1$ in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1}$ ein, so erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2 = \frac{s'(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\gamma_2) + a(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\gamma_2)}{s'(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma_2) + a(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma_2)} = \frac{-s' \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma_2) + a \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma_2)}{s' \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma_2) - a \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma_2)}$. Ebenso leitet man die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{-s \cos \frac{1}{2}(\alpha + \gamma_1) + b \cos \frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1)}{s \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma_1) - b \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1)}$ her. Diese Werte für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1$ in (III) eingesetzt, giebt $\frac{(-s' \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma_2) + a \cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma_2))(s \sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma_1) - b \sin \frac{1}{2}(\alpha-\gamma_1))}{(s' \sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma_2) - a \sin \frac{1}{2}(\beta-\gamma_2))(-s \cos \frac{1}{2}(\alpha+\gamma_1) + b \cos \frac{1}{2}(\alpha-\gamma_1))} = \frac{c-d}{c+d}$. Führt man die angedeutete Multiplikation aus, addiert und subtrahiert dann auf beiden Seiten 1 und dividiert die hierdurch erhaltenen Gleichungen, so erhält man, $\gamma_1 - \gamma_2 = \eta$ gesetzt, $\frac{-ss' + sa \cos \frac{1}{2}(\gamma - \eta) + s'b \cos \frac{1}{2}(\gamma + \eta) - ab \cos \gamma}{ss' \sin \frac{1}{2}(\delta+\eta) - sa \cos \beta + s_1 b \cos \alpha + ab \sin \frac{1}{2}(\delta - \eta)} = \frac{c}{d}$ und daraus $((sa + s'b)\, d \cos \frac{1}{2}\gamma - (ss' + ab)\, c \sin \frac{1}{2}\delta) \cos \frac{1}{2}\eta + ((sa - s'b)\, d \sin \frac{1}{2}\gamma - (ss' - ab)\, c \cos \frac{1}{2}\delta) \sin \frac{1}{2}\eta = d(ss' + ab \cos \gamma) - sac \cos \beta + s'bc \cos \alpha$ (IV). Diese Gleichung wird vereinfacht, wenn man jetzt $s' - s$ für d einsetzt und beachtet, daß $c \sin \frac{1}{2}\delta = (a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma$ und $c \cos \frac{1}{2}\delta = (a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma$ ist. Der Koefficient von $\cos \frac{1}{2}\eta$ wird dann $((s'^2 - a^2)\, b - (s^2 - b^2)\, a) \cos \frac{1}{2}\gamma$, der von $\sin \frac{1}{2}\eta$ wird $-((s'^2 - a^2)\, b + (s^2 - b^2)a)$, die rechte Seite von (IV) wird $(s' - s)\, ss' + s'ab \cos \gamma - sab \cos \gamma - sac \cos \beta + s'bc \cos \alpha = (s' - s)\, ss' + s'b(a \cos \gamma + c \cos \alpha) - sa(b \cos \gamma + c \cos \beta) = (s' - s)\, ss' + b^2 s' - a^2 s = (s'^2 - a^2)\, s - (s^2 - b^2)\, s'$. Man erhält so die Endgleichung $((s'^2 - a^2)\, b - (s^2 - b^2)\, a) \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\eta - ((s'^2 - a^2)\, b + (s^2 - b^2)\, a) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\eta = (s'^2 - a^2)\, s - (s^2 - b^2)\, s'$. Bringt man dieselbe in die Form $\left(\frac{b}{a} - \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right) \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\eta - \left(\frac{b}{a} + \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\eta = \frac{s'}{a}\left(\frac{s}{s'} - \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right)$ und führt die Hülfswinkel λ, μ, ν durch die Gleichungen $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \lambda$, $\frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2} = \operatorname{tg} \mu$, $\frac{s}{s'} = \operatorname{tg} \nu$ ein, so entsteht $\sin(\lambda - \mu) \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\eta + \sin(\lambda + \mu) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\eta = \frac{s' \sin(\nu - \mu) \cos \lambda}{a \cos \nu}$ (§ 3, 1). Die übrigen Winkel sind aus (I) und (II) zu berechnen. (III) kann zur Kontrolle dienen.

Hosted by Google

149. $CZ - AZ = d$, $AZ - BZ = d'$. Aufl. ähnlich wie 148. Man erhält schließlich, $\gamma_1 - \gamma_2 = \eta$ gesetzt, $(a(b^2 - d^2) - b(a^2 - d'^2))\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\eta + (a(b^2 - d^2) + b(a^2 - d'^2))\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\eta = -d(a^2 - d'^2) + d'(b^2 - d^2)$ oder, wenn man $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\lambda$, $\frac{b^2 - d^2}{a^2 - d'^2} = \operatorname{tg}\mu$, $\frac{d}{d'} = \operatorname{tg}\nu$ setzt, $\sin(\mu - \lambda)\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\eta + \sin(\mu + \lambda)\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\eta = \frac{d'\cos\lambda\sin(\mu - \nu)}{a\cos\nu}$ (§ 3, 1).

150. $CZ^2 - AZ^2 = d^2$, $CZ^2 - BZ^2 = d'^2$. Aufl. Fällt man $ZY \perp BC$ und $ZX \perp AC$, so ist $CX^2 - AX^2 = d^2$, mithin $CX - AX = \frac{d^2}{b}$ und $CX = \frac{b^2 + d^2}{2b}$, ebenso $CY = \frac{a^2 + d'^2}{2a}$, folglich $\frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = \frac{CX}{CY} = \frac{(b^2 + d^2)a}{(a^2 + d'^2)b}$ (§ 7, 5).

151. $CZ^2 + AZ^2 = s^2$, $CZ^2 + BZ^2 = s'^2$. Aufl. Ist D die Mitte von BC, E die von AC, so kann man DZ und EZ berechnen z. B. $EZ = \sqrt{\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}b^2}$. Dann kann man $\triangle DEZ$ berechnen ($DE = \frac{1}{2}c$), findet dadurch $\angle DEZ$ und EDZ, kann dann γ_1 und γ_2 aus $\triangle CEZ$ und $\triangle CDZ$ berechnen.

Aufgaben über den Kreis.

§ 39.

Gegeben Kreise, Linien und Punkte; gesucht Linien und Punkte.

1. Von P an K eine Tangente zu ziehen. Bekannt $PK = c$ und r, gesucht $\angle KPA = \psi$, wenn A der Berührungspunkt ist. Aufl. $\sin\psi = \frac{r}{c}$.

2. Von P aus eine Linie zu ziehen, die K unter der Sehne s schneidet. Bekannt PK = c, r, s, gesucht der Winkel ψ, den die Linie mit PK bildet. Aufl. $\sin\psi = \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2c}$.

3. Von P aus eine Linie zu ziehen, die K unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel α schneidet. Bekannt PK = c, r, α gesucht der Winkel ψ, den die Linie mit PK bildet. Aufl. $\sin\psi = \frac{r\cos\alpha}{c}$.

a) Gegeben ist $L \parallel L'$, P auf L, P' auf L', und K (hier zwischen L und L'). An K soll eine Tangente XX' (X auf L, X' auf L')

Hosted by Google

so gezogen werden, daß sie noch außerdem eine Bedingung erfüllt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß XX' zwischen PP' und K liegt. Bekannt sind die von K resp. auf L und L' gefällten Senkrechten $KA = a$, $KA' = a'$, $PA = c$, $P'A' = c'$ und r, gesucht $\angle AKZ = \varphi$, wenn Z den Berührungspunkt von XX' mit K bezeichnet. Es ist $AX = \frac{r - a\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $A'X' = \frac{r + a'\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $PX = \frac{c\sin\varphi + a\cos\varphi - r}{\sin\varphi}$, $P'X' = \frac{c'\sin\varphi - a'\cos\varphi - r}{\sin\varphi}$.

Unter den angegebenen Bedingungen die Tangente an K so zu ziehen, daß

4. $XX' = b$. Aufl. $\sin\varphi = \frac{a + a'}{b}$.
5. $PX + P'X' = s$ (§ 3, 1).
6. $PX - P'X' = d$. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a + a'}{c - c' - d}$.
7. $PX : P'X' = m : n$ (§ 3, 1).
8. $PX = XX'$ (§ 3, 1).
9. $PX : XX' = m : n$ (§ 3, 1).
10. $PX + P'X' = XX'$ (§ 3, 1).
11. $PX - P'X' = XX'$ (§ 3, 1).
12. $AX = P'X'$ (§ 3, 1).
13. $AX + A'X' = PX + P'X'$ (§ 3, 1).
14. $PX + P'X' + XX' = s$ (§ 3, 1).
15. Trapez $PXX'P' :$ Trapez $AXX'A' = m : n$.

b) Gegeben $L \parallel L'$ und K (hier zwischen L und L'). An K soll eine Tangente XX' (X auf L, X' auf L', Berührungspunkt Z) so gezogen werden, daß sie noch einer Bedingung genügt. Bekannt sind die von K respektive auf L und L' gefällten Senkrechten $KA = a$, $KA' = a'$ und r, gesucht $\angle A'KZ = \varphi$. Es ist $XZ = \frac{a + r\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $X'Z = \frac{a' - r\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

Unter den angegebenen Bedingungen an K eine Tangente zu ziehen, so daß

16. $XZ = X'Z$.
17. $XZ : X'Z = m : n$
18. $XX' = b$.
19. $XZ - X'Z = d$ (§ 3, 1).
20. $XZ \cdot X'Z = q^2$.
21. $XZ^2 + X'Z^2 = s^2$.
22. $XZ^2 - X'Z^2 = d^2$.

c) Gegeben ist ein Kreissektor ABK (Mittelpunkt K). Auf dem Bogen AB soll der Punkt Z so bestimmt werden, daß, nachdem $ZX \perp KA$, $ZY \perp KB$ gefällt ist, noch einer Bedingung genügt wird. Bekannt ist r, $\angle AKB = \gamma$, gesucht $\angle AKZ = \varphi$, $\angle BKZ = \psi$. Es ist $KX = r\cos\varphi$, $KY = r\cos\psi$, $XZ = r\sin\varphi$, $YZ = r\sin\psi$,

Hosted by Google

$AX = r\,(1 - \cos\varphi) = 2\,r \sin \frac{1}{2}\varphi^2$, $BY = r\,(1 - \cos\psi) = 2\,r \sin \frac{1}{2}\psi^2$.

Unter den gegebenen Bedingungen Z auf $\overset{\frown}{AB}$ so zu bestimmen, daß gegeben

23. $XZ : YZ = m : n$ (§ 7, 1)
24. $KX : KY = m : n$ (§ 7, 5)
25. $AX : BY = m : n$ (§ 7, 1)
26. $KX : YZ = m : n$ (§ 7, 3)
27. $KX = BY$ (§ 4, 5)
28. $KX : BY = m : n$ (§ 3, 5)
29. $AX = YZ$ (§ 4, 9)
30. $KX + KY$ (§ 4, 5)
31. $KX - KY$ (§ 4, 7)
32. $XZ + YZ$ (§ 4, 1)
33. $XZ - YZ$ (§ 4, 2).
34. $XZ + YZ = AX + BY$. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \sqrt{2}$ (§ 4, 1).
35. $KX + KY = AX + BY$ (§ 4, 5).
36. $KX + KY + XZ + YZ = s$. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \frac{s}{r\sqrt{2}}$ (§ 4, 1).
37. $XZ \cdot YZ$ (§ 6, 1).
38. $KX \cdot KY$ (§ 6, 5).
39. $AX \cdot BY$ (§ 6, 1).
40. $KX \cdot KY = AX \cdot BY$ (§ 4, 5).
41. $XZ \,.\, YZ : AX \,.\, BY = m : n$ (§ 6, 7).
42. $KX \,.\, KY : XZ \,.\, YZ = m : n$ (§ 6, 11).
43. $KX - AX = KY - BY$ (§ 3, 5).
44. $\triangle KXZ : \triangle KYZ = m : n$ (§ 7, 1).
45. Inhalt von Viereck KXZY.

d) Gegeben ist ein Sektor ABK (Mittelpunkt K). An Bogen AB eine Tangente (Berührungspunkt Z) so zu ziehen, daß, nachdem man auf dieselbe die Senkrechten AX und BY gefällt, noch einer Bedingung genügt werde. Bekannt ist r und $\angle AKB = \gamma$, gesucht $\angle AKZ = \varphi$, $BKZ = \psi$. Es ist $AX = r - r\cos\varphi = 2\,r \sin \frac{1}{2}\varphi^2$, $BY = r - r\cos\psi = 2\,r \sin \frac{1}{2}\psi^2$, $XZ = r \sin\varphi$, $YZ = r \sin\psi$.

Unter den gegebenen Bedingungen an AB eine Tangente zu ziehen, wenn gegeben

46. $AX : BY = m : n$ (§ 7, 1)
47. $XZ : YZ = m : n$ (§ 7, 1)
48. $AX = YZ$ (§ 4, 9)
49. $AX : YZ = m : n$ (§ 3, 1)
50. $AX + BY$ (§ 4, 5)
51. $AX - BY$ (§ 4, 7)
52. $XZ + YZ$ (§ 4, 1)
53. $XZ - YZ$ (§ 4, 3).
54. $AX + BY = XZ + YZ$. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \sqrt{2}$ (§ 4, 1).
55. $AX - BY = XZ - YZ$.
56. $AX + BY : XZ + YZ = m : n$. Aufl. $m \sin\varphi + n \cos\varphi + m \sin\psi + n \cos\psi = 2\,n$. Nach Einführung des Hülfs-

Hosted by Google

winkels $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{n}{m}$ entsteht hieraus $\sin(\varphi + \varkappa) + \sin(\psi + \varkappa) = 2 \sin \varkappa$ (§ 4, 1).

57. XZ . YZ (§ 6, 1).
58. AX . BY (§ 6, 1).
59. AX . BY : XZ . YZ = m : n
60. △ AXZ : △ BYZ = m : n (§ 7, 1).
61. △ AXZ + △ BYZ (§ 3, 3).

e) Gegeben ist K und ein Winkel C, dessen Schenkel K in A und B berühren. Es soll auf dem Bogen AB (hier dem kleineren) ein Punkt Z bestimmt werden, so daß, nachdem ZX ⊥ CA, ZY ⊥ CB gefällt ist, noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt ist r, ∠ ACB = γ; aus denselben leicht zu berechnen $AC = BC = r \cot \frac{1}{2}\gamma = c$; gesucht ∠ AKZ = φ, ∠ BKZ = ψ, deren Summe π − γ ist. Es ist AX = r sin φ, BY = r sin ψ, XZ = r − r cos φ = $2 r \sin \frac{1}{2}\varphi^2$, YZ = r − r cos ψ = $2 r \sin \frac{1}{2}\psi^2$, CX = c − r sin φ, CY = c − r sin ψ.

Unter den angegebenen Bedingungen den Punkt Z auf $\overset{\frown}{AB}$ zu bestimmen, wenn gegeben

62. XZ : YZ = m : n (§ 7, 1)
63. AX : BY = m : n (§ 7, 1)
64. CX : CY = m : n (§ 3, 3)
65. XZ = BY (§ 4, 9)
66. XZ = CY (§ 4, 11)
67. AX = CY (§ 4, 1)
68. AX : CY = m : n (§ 3, 3)
69. XZ + YZ (§ 4, 5)
70. XZ − YZ (§ 4, 7)
71. AX + BY (§ 4, 1)
72. AX − BY (§ 4, 3)
73. AX . BY (§ 6, 1)
74. XZ . YZ (§ 6, 1).
75. AX + BY = XZ + YZ. Aufl. $\sin(\varphi + \frac{1}{4}\pi) + \sin(\psi + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$.
76. AX − BY = XZ − YZ.
77. AX + BY : XZ + YZ = m : n (56).
78. AX . BY : XZ . YZ = m : n (§ 6, 7).

f) Gegeben ist K und L. Auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß, nachdem an K die Tangenten XB und XC gezogen sind, die Winkel bei X noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt ist r, die von K auf L gefällte Senkrechte KA = a, gesucht sind, wenn nicht etwa durch die Bedingung der Aufgabe selbst gegeben, ∠ AXB = φ, ∠ BXC = ψ.

Es ist $XK = \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\psi} = \frac{a}{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\psi)}$.

Unter den angegebenen Bedingungen X auf L zu bestimmen, wenn gegeben

79. φ. Aufl. $\frac{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\psi)}{\sin \frac{1}{2}\psi} = \frac{a}{r}$ (§ 7, 2).
80. ψ.

Hosted by Google

81. $\psi = \varphi$. Aufl. $\cos\psi = \frac{a-r}{2r}$. 82. $\psi = 2\varphi$.

83. $\psi = 3\varphi$. Aufl. $\frac{\sin\frac{5}{2}\varphi}{\sin\frac{3}{2}\varphi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\varphi^2 - \frac{a-r}{2r}\cos\varphi - \frac{a+r}{4r} = 0$.

84. $\psi = 4\varphi$. Aufl. $\frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\varphi^2 - \frac{a}{2r}\cos\varphi - \frac{1}{4} = 0$.

85. $\psi = \frac{1}{2}\varphi$. Aufl. $\frac{\sin\frac{5}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\psi^2 + \frac{1}{2}\cos\psi - \frac{r+a}{4r} = 0$.

g) Gegeben ist K, P und P'. An K eine Tangente (Berührungspunkt Y) so zu ziehen, daß, wenn auf dieselbe die Senkrechten PX und P'X' gefällt werden, noch eine Bedingung erfüllt wird. Wir beschränken uns auf den Fall, daß K, P, P' auf derselben Seite der Tangente liegen. Bekannt ist r, $KP = a$, $KP' = a'$, $\angle PKP' = \gamma$. Zieht man noch durch K zu XX' die Parallele ZZ', so kann man die Winkel $PKZ = \varphi$ und $P'KZ' = \varphi'$ als gesuchte Stücke betrachten; ihre Summe ist je nach der verschiedenen Lage von P und P' zum Kreise $\pi - \gamma$ oder γ. Es ist $XY = a\cos\varphi$, $X'Y = a'\cos\varphi'$, $PX = r + a\sin\varphi$, $P'X' = r + a'\sin\varphi'$.

Unter den angegebenen Bedingungen an K eine Tangente zu ziehen, wenn gegeben

86. $XY = X'Y$ (§ 7, 5) 87. $PX = P'X'$ (§ 7, 1).
88. $XY = P'X'$. Aufl. $a\cos\varphi - a'(\cos\frac{1}{2}\pi - \varphi') = r$ (§ 3, 5).
89. $XY : X'Y = m : n$ (§ 7, 5). 93. $PX - P'X'$ (§ 3, 3).
90. $PX : P'X' = m : n$ (§ 3, 3). 94. XX' (§ 3, 5).
91. $XY : P'X' = m : n$ (88) (§ 3, 3) 95. $XY - X'Y$ (§ 3, 5).
92. $PX + P'X'$ (§ 3, 3).
96. $PX + P'X' = XX'$. Aufl. $a(\cos\varphi - \sin\varphi) + a'(\cos\varphi' - \sin\varphi') = 2r$, oder $a\sin(\frac{1}{4}\pi - \varphi) + a'\sin(\frac{1}{4}\pi - \varphi') = r\sqrt{2}$ (§ 3, 3).
97. $XY \cdot X'Y$ (§ 6, 5).

h) Gegeben ist K und ein Winkel $C = \gamma$, dessen Schenkel K in A und B berühren. An K eine Tangente (Berührungspunkt Z), welche CA in X, CB in Y schneidet, so zu ziehen, daß

98. $XZ : YZ = m : n$. Aufl. $\angle AKZ = \varphi$, $\angle BKZ = \psi$ gesetzt, ist $XZ = r\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$, $YZ = r\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\psi$ (§ 6, 9).
99. $XZ \cdot YZ = q^2$. Aufl. wie 98. $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\psi = \frac{q^2}{r^2}$ (§ 6, 7).

Hosted by Google

i) Gegeben ist ein Winkel C und K zwischen seinen Schenkeln. Auf der Peripherie von K einen Punkt Z so zu bestimmen, daß, wenn man auf die Schenkel die Senkrechten ZX und ZY fällt, noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt ist r, $CK = c$, $\angle KCX = \alpha$, $\angle KCY = \beta$. Fällt man auf die Schenkel noch die Senkrechten KA und KB (X liegt auf CA), so sind $CA = a$, $CB = b$, $KA = a'$ $KB = b'$ leicht zu berechnen. Als gesuchte Stücke empfiehlt es sich, nicht die Winkel ACZ und BCZ hinzustellen, sondern $\angle AKZ = \varphi$ und $\angle BKZ = \psi$, weil sich sämtliche Stücke der Figur durch diese Winkel am einfachsten ausdrücken lassen und nach Berechnung derselben alles übrige leicht gefunden wird. Es ist $CX = a - r \sin \varphi$, $CY = b - r \sin \psi$, $XZ = a' - r \cos \varphi$, $YZ = b' - r \cos \psi$.

Unter den angegebenen Bedingungen Z auf der Peripherie von K zu bestimmen, wenn gegeben

100. $CX = CY$ (§ 4, 3).
101. $XZ = YZ$ (§ 4, 7).
102. $CX : CY = m : n$ (§ 3, 3).
103. $XZ : YZ = m : n$ (§ 3, 5).
104. $CX + CY$ (§ 4, 1).
105. $CX - CY$ (§ 4, 3).
106. $XZ + YZ$ (§ 4, 5).
107. $XZ - YZ$ (4, 7).
108. $CX + CY + XZ + YZ = s$. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \frac{a + b + a' + b' - s}{r}$ (§ 4, 1).
109. $CX : XA = YB : CY$ (§ 3, 3).

k) Gegeben K und ein Durchmesser AB. Durch B eine Linie, welche die Peripherie von K in Y und eine in A errichtete Tangente in X trifft, so zu ziehen, daß

110. $XY = a$. Aufl. $\angle ABY = \varphi$ gesetzt, ist $\cos \varphi^2 + \frac{a}{2r} \cos \varphi - 1 = 0$.
111. $BY : XY = m : n$. Aufl. $\cot \varphi = \sqrt{\frac{m}{n}}$.

l) Gegeben ist K und ein Durchmesser AB. X auf der Peripherie von K so zu bestimmen, daß, wenn man auf eine an den Kreis in A gelegte Tangente die Senkrechte XY fällt, eine Bedingung erfüllt wird. $\angle ABX = \varphi$ gesetzt, ist $BX = 2r \cos \varphi$, $AY = 2r \sin \varphi \cos \varphi = r \sin 2\varphi$, $XY = 2r \sin \varphi^2$.

Unter den angegebenen Bedingungen X auf der Peripherie von K so zu bestimmen, daß

112. $BX = XY$. Aufl. $\cos \varphi^2 + \cos \varphi - 1 = 0$.
113. $BX : XY = m : n$. Aufl. $m \cos \varphi^2 + n \cos \varphi - m = 0$.
114. $BX + XY = s$. Aufl. $\cos \varphi^2 - \cos \varphi + \frac{s - 2r}{2r} = 0$.

Hosted by Google

115. $BX - XY = d$. Aufl. $\cos\varphi^2 + \cos\varphi - \frac{d + 2r}{2r} = 0$.

m) Gegeben ist K und P innerhalb K. Durch P eine Sehne XY zu ziehen, welche noch eine Bedingung erfüllen soll. Bekannt ist r und $KP = e$, gesucht, wenn Z die Mitte von XY bezeichnet, $\angle XKZ = \psi$ und $\angle PKZ = \varphi$. Aus den Dreiecken PKX und PKY findet man mit Hülfe des Sinussatzes $PX = \frac{r \sin(\psi+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{e \sin(\psi+\varphi)}{\cos\psi}$ und $PY = \frac{r \sin(\psi-\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{e \sin(\psi-\varphi)}{\cos\psi}$. Die jedesmalige in der Aufgabe gestellte Bedingung liefert eine Gleichung zwischen ψ und φ, die andere ist für alle Fälle $r\cos\psi = e\cos\varphi$. Für die Aufgaben, in denen $\overset{\frown}{AX}$ ein Vielfaches von $\overset{\frown}{BY}$ werden soll (AB ist ein Durchmesser durch P, P zwischen K und B), ist zu beachten, daß $\angle AKX = \pi - (\psi + \varphi)$ und $\angle BKY = \psi - \varphi$ ist. Soll nun $\overset{\frown}{AX} = n \cdot \overset{\frown}{BY}$ werden, so muß $\frac{1}{2}(\psi + \varphi) = \frac{1}{2}\pi - \frac{n}{2}(\psi - \varphi)$, oder wenn $\frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \vartheta$ gesetzt wird, $\frac{1}{2}(\psi + \varphi) = \frac{1}{2}\pi - n\vartheta$ werden. Aus der Gleichung $r\cos\psi = e\cos\varphi$ folgt ferner $\frac{r+e}{r-e} = \cot\frac{1}{2}(\psi+\varphi)\cot\frac{1}{2}(\psi-\varphi)$, und nach Einsetzung der letzten Werte $\frac{\operatorname{tg} n\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{r+e}{r-e}$.

Durch P in K die Sehne XY so zu ziehen, daß

116. $PX + PY = s$. Aufl. $\sin\psi = \frac{s}{2r}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2e}$.

117. $PX - PY = d$. Aufl. $\sin\varphi = \frac{d}{2e}$, $\cos\psi = \frac{\sqrt{4e^2 - d^2}}{2r}$.

118. $PX : PY = m : n$. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{e}{r}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{(m+n)e}{(m-n)r}$ (§ 9, 3).

119. $\overset{\frown}{AX} = 2\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{3e-r}{e+r}}$. 2. Aufl. $\cos 2\vartheta = \frac{r-e}{2e}$.

120. $\overset{\frown}{AX} = 3\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{2e-r}{2e+r}}$. 2. Aufl. $\cos 2\vartheta = \frac{r}{2e}$.

131. $\overset{\frown}{AX} = 4\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $(r+e)\operatorname{tg}\vartheta^4 - 2(r+5e)\operatorname{tg}\vartheta^2 - 3r + 5e = 0$. 2. Aufl. $4e\cos 2\vartheta^2 - 2(r-e)\cos 2\vartheta - (r+e) = 0$.

Hosted by Google

122. $\overset{\frown}{AX} = 5\,\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $(2r + 3e)\operatorname{tg}\vartheta^4 - 10e\operatorname{tg}\vartheta^2 - 2r + 3e = 0$. 2. Aufl. $4e\cos 2\vartheta^2 - 2r\cos 2\vartheta - e = 0$.

123. $2\,\overset{\frown}{AX} = 3\,\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $(r - e)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta^4 + 2(r + 5e)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta^2 + r - 5e = 0$. 2. Aufl. $2(r - e)\cos\vartheta^2 - (r + 3e)\cos\vartheta + (r + e) = 0$.

124. $AX : BY = m : n$. Aufl. $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\psi + \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} = \dfrac{m(r - e)}{n(r + e)}$ (§ 9, 4).

125. Gegeben K, eine Sehne AB und P auf AB. Durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß, wenn auf AB die Senkrechten XX′ und YY′ gefällt werden, $XX' - YY' = d$ wird. Aufl. Bezeichnet man die Mitte von AB mit C, die von XY mit Z, so ist bekannt r, $\angle AKB = 2\alpha$, $KP = e$, ferner leicht zu finden $\angle PKC = \gamma$, gesucht ist $\angle PKZ = \varphi$ und $XKZ = \psi$, zwischen denen die Gleichung $e\cos\varphi = r\cos\psi$ besteht. Es ist $XX' = r\cos\alpha - r\cos(\gamma + \varphi + \psi)$ und $YY' = -r\cos\alpha + r\cos(\gamma + \varphi - \psi)$, daher $e\cos\varphi\cos(\gamma + \varphi) = r\cos\alpha - \frac{1}{2}d$ (§ 6, 6).

126. Gegeben K, eine Sehne AB und P auf der Peripherie von K. Durch P eine Sehne PX, welche AB in Y schneidet, so zu ziehen, daß $PY : YX = m : n$. Aufl. Bekannt ist $\angle AKB = 2\alpha$, $\angle AKP = \beta$, leicht zu finden die von P auf AB gefällte Senkrechte $PQ = r\cos\alpha - r\cos(\beta + \alpha) = 2r\sin(\frac{1}{2}\beta + \alpha)\sin\frac{1}{2}\beta$. Gesucht ist $\angle PKX = 2\varphi$. Es ist $PY = -\dfrac{PQ}{\sin(\beta + \alpha + \varphi)}$, $PX = 2r\sin\varphi$, daher $\sin\varphi\sin(\beta + \alpha + \varphi) = -\dfrac{(m+n)PQ}{2mr} = \dfrac{(m + n)\sin(\frac{1}{2}\beta + \alpha)\sin\frac{1}{2}\beta}{m}$ (§ 6, 2).

127. Gegeben K, eine Sehne AB und P innerhalb K. Durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß, wenn auf AB die Senkrechten XX′ und YY′ gefällt werden, $XX' + YY' = s$ wird. Aufl. Bekannt ist r, $\angle AKB = 2\alpha$, $\angle BKP = \beta$, $KP = e$, gesucht $\angle XKY = 2\psi$ und, wenn Z die Mitte von XY bezeichnet, $\angle PKZ = \varphi$. Es ist $XX' = r\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta + \varphi + \psi)$ und $YY' = r\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta + \varphi - \psi)$, daher, wenn man die Gleichung $r\cos\psi = e\cos\varphi$ zu Hülfe nimmt, $\cos(\alpha + \beta + \varphi)\cos\varphi = \dfrac{2r\cos\alpha - s}{2e}$.

Hosted by Google

n) Für die Aufgaben 128 bis 140 beachte man Folgendes: Im Kreise K schneiden sich zwei Sehnen AB und XY, deren Mittelpunkte C und W sind, in Z unter dem Winkel ψ, so daß $\angle$ CKW $= \psi$. KW schneide AB in V. Ferner werde $\angle$ AKB mit 2α, $\angle$ XKY mit 2φ bezeichnet. Dann ist $CV = CK \operatorname{tg}\psi = r\cos\alpha\operatorname{tg}\psi$, $KV = \frac{CK}{\cos\psi} = \frac{r\cos\alpha}{\cos\psi}$, $VW = KW - KV = r\frac{\cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi}$, $VZ = \frac{VW}{\sin\psi} = r\frac{\cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi\sin\psi}$, $AZ = AC + CV + VZ$ $= r\frac{\sin\alpha\cos\psi\sin\psi + \cos\alpha\sin\psi^2 + \cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi\sin\psi} =$ $r\frac{\sin\alpha\sin\psi - \cos\alpha\cos\psi + \cos\varphi}{\sin\psi} = r\frac{\cos\varphi - \cos(\alpha+\psi)}{\sin\psi}$, ebenso $BZ = r\frac{\cos(\alpha-\psi) - \cos\varphi}{\sin\psi}$, $XZ = r\frac{\cos\alpha - \cos(\varphi+\psi)}{\sin\psi}$, $YZ = r\frac{\cos(\varphi-\psi) - \cos\alpha}{\sin\psi}$, $KZ^2 = KW^2 + WZ^2 =$ $r^2\frac{\cos\varphi^2 - 2\cos\varphi\cos\alpha\cos\psi + \cos\alpha^2}{\sin\psi^2}$. In den Aufgaben 132 bis 140 tritt an die Stelle von A, B, C, α bezüglich X', Y', W', φ', ebenso in 128 bis 131 β an die Stelle von ψ, in 136 bis 140 P an die Stelle von Z. In 132 bis 135 ist KP $= e$ bekannt, und $\angle$ PKW' $= \vartheta$ wird nach der Berechnung von φ' gefunden aus $\cos\vartheta = \frac{r\cos\varphi'}{e}$.

Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine andere Sehne XY so zu ziehen, daß sie AB unter dem Winkel β schneidet (Durchschnittspunkt Z) und

128. XY $= a$. Aufl. φ zu finden.

129. YZ $-$ XZ $= d$. Aufl. $\cos\varphi = \frac{d\operatorname{tg}\beta}{2r} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

130. XZ : YZ $= m : n$. Aufl. $(m+n)\cos\beta\cos\varphi + (m-n)\sin\beta\sin\varphi = (m+n)\cos\alpha$ (§ 3, 1).

131. Gegeben K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY, welche AB in Z schneidet, so zu ziehen, daß XZ $= b$, YZ $= c$ wird. Aufl. $\sin\varphi = \frac{b+c}{2r}$, $2r\cos\varphi\cos\psi - (c-b)\sin\psi = 2r\cos\alpha$ (§ 3, 1).

132. Gegeben K und P. Zwei Sehnen XY und X'Y', welche sich in Z unter dem gegebenen Winkel β schneiden, so zu ziehen, daß X'Y' durch P geht, XZ $=$ YZ und X'Z : Y'Z $= m : n$ wird. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{(m+n)\operatorname{tg}\beta}{m-n}$, $\cos\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\cos\beta}$.

Hosted by Google

133. Gegeben K und P. Zwei (in Z) sich senkrecht schneidende Sehnen XY und X′Y′ so zu ziehen, daß X′Y′ durch P geht, XZ : YZ = m : n, X′Z : Y′Z = m′ : n′ wird. Aufl. $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu setzen. $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m-n}{m+n'}$, $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{m'+n'}{m'-n'}$ (§ 9, 4).

134. Gegeben K und P. Zwei Sehnen XY und X′Y′, welche sich (in Z) unter dem gegebenen Winkel β schneiden, so zu ziehen, daß X′Y′ durch P geht, XZ − YZ = d, X′Z − Y′Z = d′ wird. Aufl. $\cos\varphi = \frac{d' + d\cos\beta}{2r\sin\beta}$, $\cos\varphi' = \frac{d + d'\cos\beta}{2r\sin\beta}$. (Man beachte noch die speciellen Fälle $\beta = \frac{1}{2}\pi$ und d = d′).

135. Gegeben K und P. Zwei sich in Z schneidende Sehnen XY und X′Y′ so zu ziehen, daß X′Y′ durch P geht, X′Z − Y′Z = d, XZ = b, YZ = c wird. Aufl. $\sin\varphi = \frac{b+c}{2r}$, $2r\cos\varphi\sin\psi - (b-c)\cos\psi = d$ (§ 3, 1).

136. Gegeben K und P innerhalb K. Durch P zwei gleiche Sehnen XY und X′Y′ zu ziehen, welche sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden. Aufl. $\varphi = \varphi'$, $\cos\varphi = \frac{e\cos\frac{1}{2}\beta}{r}$.

Gegeben K und P innerhalb K. Durch P zwei aufeinander senkrechte Sehnen XY und X′Y′ so zu ziehen, daß

137. XY : X′Y′ = m : n. Aufl. $\sin\varphi^2 = \frac{(2r^2 - e^2)\,m^2}{r^2(m^2+n^2)}$.

138. XY + X′Y′ = s. Aufl. $\sin\varphi^2 + \sin\varphi'^2 = \frac{2r^2 - e^2}{r^2}$, $\sin\varphi + \sin\varphi' = \frac{s}{2r}$.

139. XY − X′Y′ = d (138.) 140. XY . X′Y′ = p^2 (138).

141. Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY ∥ AB so zu ziehen, daß sie durch KA und KB in drei gleiche Teile geteilt wird. Aufl. Bekannt r, ∠ AKB = 2 α, gesucht ∠ XKY = 2 φ. Es ist tg φ = 3 tg α.

142. Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY ∥ AB, welche KA in Z und KB in V schneidet, so zu ziehen, daß XZ : ZV = m : n. Aufl. Ähnlich wie 141 ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{(2m+n)\operatorname{tg}\alpha}{n}$.

o) Gegeben K, P und P′. Durch P soll eine Sehne XY, durch P′ eine Sehne X′Y′ gezogen werden, so daß sie beide noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt ist r, KP = e, KP′ = e′, ∠ PKP′ = γ, gesucht ∠ XKY = 2 φ, X′KY′ = 2 φ′, ferner, wenn Z und Z′

Hosted by Google

die Mitten von XY und X′Y′ sind, $\angle$ PKZ $= \psi$, P′KZ′ $= \psi'$. Zu beachten ist XY $= 2\,r \sin\varphi$, X′Y′ $= 2\,r \sin\varphi'$, $r\cos\varphi = e\cos\psi$, $r\cos\varphi' = e'\cos\psi'$.

Durch P und P′ in K die Sehnen XY und X′Y′ so zu ziehen, daß sie

143. gleich und parallel sind. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\psi'} = \frac{e'}{e}$, $\psi + \psi' = \pi - \gamma$ (§ 7, 5).

144. parallel werden und daß XY : X′Y′ $=$ m : n. Aufl. Aus $\sin\varphi : \sin\varphi' =$ m : n folgt $(r^2 - r^2\cos\varphi^2)\,n^2 = (r^2 - r^2\cos\varphi'^2)\,m^2$, daher, wenn man obige Gleichungen für $r\cos\varphi$ und $r\cos\varphi'$ benutzt, $e^2n^2\cos\psi^2 - e'^2m^2\cos\psi'^2 = -r^2(m^2 - n^2)$ oder $e'^2m^2\cos 2\psi' - e^2n^2\cos 2\psi = 2r^2(m^2 - n^2) - e'^2m^2 + e^2n^2$ (§ 3, 5).

145. sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden und XY $=$ X′Y′. Aufl. wie 143, nur $\psi + \psi' = \pi - \beta - \gamma$.

146. sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden und XY : X′Y′ $=$ m : n. Aufl. ähnlich wie 144.

147. Gegeben K und auf einem Durchmesser P und P′ zu verschiedenen Seiten von K (also K zwischen P und P′). Durch P und P′ zwei gleiche Sehnen zu ziehen, die sich auf der Peripherie schneiden. Aufl. Bekannt ist r, KP $=$ e, KP′ $=$ e′, gesucht, wenn man die verlangten Sehnen mit XY und XY′, ihre Mitten mit Z und Z′ bezeichnet, $\angle$ XKY $=\angle$ XKY′ $= 2\varphi$, $\angle$ PKZ $= \psi$, $\angle$ P′KZ′ $= \psi'$. Es ist $r\cos\varphi = e\cos\psi = e'\cos\psi'$ oder $\cos\psi = \frac{r\cos\varphi}{e}$, $\cos\psi' = \frac{r\cos\varphi}{e'}$. Die Addition und Subtraktion beider Gleichungen liefert, wenn man berücksichtigt, daß $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\psi + \psi')$ ist, $2\cos\frac{1}{2}(\psi + \psi')\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' + e)\,r\cos\varphi}{ee'} = \frac{(e + e')\,r\sin\frac{1}{2}(\psi + \psi')}{ee'}$ und $2\sin\frac{1}{2}(\psi + \psi')\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' - e)\,r\cos\varphi}{ee'} = \frac{(e' - e)\,r\sin\frac{1}{2}(\psi + \psi')}{ee'}$. Aus der letzten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich $\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' - e)\,r}{2\,ee'}$, aus der ersten $\cot\frac{1}{2}(\psi + \psi') = \frac{(e' + e)\,r}{2\,ee'\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi)}$.

p) In den Aufgaben 148 bis 153 sind zwei Kreise K und K′ gegeben und es soll eine Linie gefunden werden, die zu beiden in vorgeschriebener Beziehung steht. Bekannt ist r, r′, und KK′ $=$ c, gesucht der Winkel φ, den die Richtung der gesuchten Linie mit KK′ bildet. Unter dem Winkel, den eine Gerade mit einem Kreise bildet, versteht

Hosted by Google

man den Winkel, den sie mit der Tangente ihres Durchschnittspunktes (Abschnittswinkel) bildet. Schneidet die Sehne AB den Kreis K unter dem Winkel α, so ist $\angle AKB = 2\alpha$, und mittelst der Gleichung $AB = 2r \sin\alpha$ kann man AB finden, wenn r und α gegeben, ebenso α, wenn r und AB gegeben.

Gegeben K und K'. Eine Linie zu bestimmen, welche

148. K und K' berührt. Aufl. (Äußere Berührung) $\sin\varphi = \frac{r' - r}{c}$.

149. K berührt und K' unter dem gegebenen Winkel α' schneidet. Aufl. $\sin\varphi = \frac{r' \cos\alpha' - r}{c}$.

150. K unter dem Winkel α, K' unter α' schneidet. Aufl. $\sin\varphi = \frac{r' \cos\alpha' - r\cos\alpha}{c}$.

151. K berührt, K' unter der Sehne s' schneidet (149).

152. K unter dem Winkel α, K' unter der Sehne s' schneidet (150).

153. K unter der Sehne s, K' unter s' schneidet (150).

154. Gegeben K und K', welche sich in A berühren, so daß K' von K eingeschlossen wird. Durch A eine Sehne, welche K in Y, K' in Y' schneidet, so zu ziehen, daß $YY' = a$. Aufl. $\angle YAK = \varphi$ gesetzt, ist $\cos\varphi = \frac{a}{2(r - r')}$.

155. Gegeben K und K', welche sich in A berühren, so daß K' von K eingeschlossen wird. Auf KK' eine Senkrechte ZX, welche K in X, K' in X' trifft, so zu ziehen, daß $XX' = a$. Aufl. Bekannt a, r, r', $KK' = c$, gesucht $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'K'Z = \varphi'$. Es ist $r\cos\varphi - r\cos\varphi' = c$ und $r\sin\varphi - r\sin\varphi' = a$. Indem man quadriert und addiert, ergiebt sich $\cos(\varphi - \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - c^2 - a^2}{2rr'}$.

Man berechne erst $k = \sqrt{c^2 + a^2}$ und bestimme dann $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$.

q) Gegeben K und K', welche sich in A und B schneiden. Durch A soll eine Linie, welche die Peripherieen von K und K' bezüglich in X und X' schneidet, so gezogen werden, daß sie noch eine Bedingung erfüllt. Bekannt ist r, r', $KK' = c$, $\angle KAK' = \gamma$, $\angle AKK' = \alpha$, $\angle AK'K = \alpha'$, sowie sämtliche Stücke von $\triangle KK'A$, gesucht $\angle AKX = \varphi$, $\angle AK'X' = \varphi'$. Es ist $AX = 2r\sin\varphi$, $AX' = 2r'\sin\varphi'$, $BX = 2r\sin BAX = 2r\sin(\alpha + \varphi)$, $BX' = 2r\sin(\alpha' + \varphi')$. Die jedesmalige Bedingung der Aufgabe liefert durch Einsetzen der betreffenden Werte eine Gleichung zwischen φ und φ', während außerdem in allen Fällen die Gleichung $\varphi + \varphi' = \gamma$ besteht.

Hosted by Google

Durch A die Linie XX′ (Doppelſehne) ſo zu ziehen, daß

156. $AX = AX'$ (§ 7, 1)
157. $AX : AX' = m : n$ (§ 7, 1)
158. $AX + AX' = s$ (§ 3, 3)
159. $AX - AX' = d$ (§ 3, 3)
160. $AX \cdot AX' = p^2$ (§ 6, 1)
161. $AX^2 - AX'^2 = d^2$. Aufl. $2\,r^2 \cos\varphi^2 - 2\,r'^2 \cos\varphi'^2 = 2\,(r^2 - r'^2) - d^2$ (§ 3, 5).
162. $AX^2 + AX'^2 = s^2$ (161)
163. $BX = BX'$ (§ 7, 1)
164. $BX : BX' = m : n$ (§ 7, 1)
165. $BX + BX' = s$ (§ 3, 3)
166. $BX - BX' = d$ (§ 3, 3)
167. $BX \cdot BX' = p^2$ (§ 6, 1).

r) Gegeben K und K′, welche ſich in A und B ſchneiden. Zwei Sehnen AX in K und AX′ in K′ ſo zu ziehen, daß $\angle XAX' = \beta$ und noch eine Bedingung erfüllt wird. Alles bleibt wie 156 bis 167, nur daß jetzt zwiſchen φ und φ' die Gleichung $\varphi + \varphi' = \pi - (\beta - \gamma)$ beſteht.

Die Sehnen AX in K und AX′ in K′ ſo zu ziehen, daß $\angle XAX' = \beta$ und

168. $AX = AX'$ (§ 7, 1)
169. $AX : AX' = m : n$ (§ 7, 1)
170. $AX + AX' = s$ (§ 3, 3)
171. $AX - AX' = d$ (§ 3, 3)
172. $AX \cdot AX' = p^2$ (§ 6, 1)
173. $AX^2 - AX'^2 = d^2$ (161)
174. $AX^2 + AX'^2 = s^2$ (162)
175. $BX = BX'$ (§ 7, 1)
176. $BX : BX' = m : n$ (§ 7, 1)
177. $BX + BX' = s$ (§ 3, 3)
178. $BX - BX' = d$ (§ 3, 3)
179. $BX \cdot BX' = p^2$ (§ 6, 1).

s) Gegeben K, K′ und P. Durch P eine Linie, welche die Peripherie von K in X und Y, die von K′ in X′ und Y′ ſchneidet, ſo zu ziehen, daß XY und X′Y′ noch eine Bedingung erfüllen. Bezeichnet man die Mitten von XY und X′Y′ mit Z und Z′, ſo iſt bekannt r, r′, $KK' = c$, $PK = e$, $PK' = e'$, ſomit auch alle Stücke von $\triangle KK'P$ wie $\angle KPK' = \gamma$, geſucht $\angle PKZ = \varphi$, $\angle PK'Z' = \varphi'$, $\angle XKZ = \psi$, $\angle X'K'Z' = \psi'$. Es iſt $XZ^2 = r^2 - KZ^2 = r^2 - e^2 \cos\varphi^2$, daher $XY^2 = 4\,r^2 - 4\,e^2 \cos\varphi^2$ und $X'Y'^2 = 4\,r'^2 - 4\,e'^2 \cos\varphi'^2$, $r \cos\psi = e \cos\varphi$, $r' \cos\psi' = e' \cos\varphi'$, ferner $\varphi + \varphi' = \gamma$.

Unter den angegebenen Bedingungen eine Linie durch P ſo zu ziehen, daß

180. $XY = X'Y'$. Aufl. $e^2 \cos\varphi^2 - e'^2 \cos\varphi'^2 = r^2 - r'^2$, daher $e^2 \cos 2\varphi - e'^2 \cos 2\varphi' = 2\,(r^2 - r'^2) - (e^2 - e'^2)$ (§ 3, 5).
181. $XY : X'Y' = m : n$. Aufl. $n^2e^2 \cos 2\varphi - m^2e'^2 \cos 2\varphi' = (2\,r^2 - e^2)\,n^2 - (2\,r'^2 - e'^2)\,m^2$ (§ 3, 5). Die ſpeciellen Fälle $m : n = r : r'$ und $m : n = e : e'$ zu beachten.
182. $XY^2 + X'Y'^2 = s^2$. Aufl. $2\,e^2 \cos 2\varphi - 2\,e'^2 \cos 2\varphi' = 4\,(r^2 + r'^2) - 2\,(e^2 + e'^2) - s^2$ (§ 3, 5).
183. $XY^2 - X'Y'^2 = d^2$. Aufl. ähnlich wie 182.

Hosted by Google

184. sie K und K′ unter gleichen Winkeln schneidet, d. h. $\psi = \psi'$.
Aufl. $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{re'}{r'e}$ (§ 7, 5).

185. sie K und K′ unter Winkeln schneiden, deren Summe gegeben, d. h. $\psi + \psi' = \sigma$. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{e}{r}$, $\frac{\cos\psi'}{\cos\varphi'} = \frac{e'}{r'}$ (§ 9, 9).

186. sie K und K′ unter Winkeln schneiden, deren Differenz gegeben, d. h. $\psi - \psi' = \delta$. Aufl. wie 185 (§ 9, 11).

t) Gegeben K, K′ und P. Von P nach K die Sehne XY und nach K′ die Sehne X′Y′ so zu ziehen, daß sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden (also $XPX' = \beta$) und noch eine Bedingung erfüllen. Alles bleibt, wie in den entsprechenden Aufgaben 180 bis 186, nur daß $\varphi + \varphi' = \pi - \beta + \gamma$ ist.

Von P aus nach K und K′ die Sehnen XY und X′Y′ so zu ziehen, daß

187. $XY = X'Y'$ (180)
188. $XY : X'Y' = m : n$ (181)
189. $XY^2 + X'Y'^2 = s^2$ (182)
190. $XY^2 - X'Y'^2 = d^2$ (183)
191. $\psi = \psi'$ (184)
192. $\psi + \psi' = \sigma$ (185)
193. $\psi - \psi' = \delta$ (186).

u) Gegeben K, K′ und eine gemeinschaftliche äußere Tangente, welche K in A, K′ in A′ berührt. P auf AA′ so zu bestimmen, daß, wenn man an K und K′ die Tangenten PB und PB′ zieht, die Winkel $APB = \psi$ und $A'PB' = \psi'$ gewisse Bedingungen erfüllen. Bekannt r, r′ und $AA' = c$, gesucht ψ und ψ'. Es ist $PA = r \cot\frac{1}{2}\psi$ und $PA' = r' \cot\frac{1}{2}\psi'$, folglich $c = r \cot\frac{1}{2}\psi + r' \cot\frac{1}{2}\psi'$.

P auf AA′ so zu bestimmen, daß

194. $\psi = \psi'$.
195. $\psi = 2\psi'$. Aufl. $c \sin\psi' - (r + r') \cos\psi' = r$ (§ 3, 1).
196. $\psi + \psi' = 2\sigma$. Aufl. $c \sin\frac{1}{2}\psi \sin\frac{1}{2}\psi' = r \cos\frac{1}{2}\psi \sin\frac{1}{2}\psi' + r' \sin\frac{1}{2}\psi \cos\frac{1}{2}\psi'$, daher nach Auflösung der Sinus- und Cosinusprodukte $(r - r') \sin\frac{1}{2}(\psi - \psi') + c \cos\frac{1}{2}(\psi - \psi') = (r + r') \sin\sigma + c \cos\sigma$ (§ 3, 1 und 2).
197. $\psi - \psi' = 2\delta$ (196).

v) Gegeben K und K′ auf derselben Seite von L. Es soll P auf L so bestimmt werden, daß, wenn man an K und K′ die Tangenten PB und PB′ zieht, die dadurch entstandenen Winkel noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt sind die auf L gefällten Senkrechten $KA = a$, $K'A' = a'$, $AA' = c$. K liege innerhalb $\angle APB$, K′ innerhalb $\angle A'PB'$. Gesucht wird $\angle APK = \varphi$, $A'PK' = \varphi'$, $BPK = \omega$, $B'PK' = \omega'$, $\angle APB = \psi$, $\angle A'PB' = \psi'$.

P so zu bestimmen, daß

Hosted by Google

198. $\psi = \psi'$. Aufl. $c = a \cot\varphi + a' \cot\varphi'$, ferner $PK = \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\omega}$, daher $r = \frac{a \sin\omega}{\sin\varphi} = \frac{a \sin(\psi - \varphi)}{\sin\varphi} = a \sin\psi \cot\varphi - a \cos\psi$, ebenso $r' = a \sin\psi \cot\varphi' - a' \cos\psi$. Durch Addition beider Gleichungen ergiebt sich $c \sin\psi - (a+a') \cos\psi = r + r'$ (§ 3, 1), ferner $\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{a}{r}$, $\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} = \frac{a'}{r'}$, $\varphi + \omega = \psi$, $\varphi' + \omega' = \psi$ (§ 7, 1).

199. $\omega = \omega'$, oder, wenn man noch an K und K' die anderen Tangenten PC und PC' zieht, $\angle BPC = B'PC'$. Aufl. $\angle PKK' = \vartheta$, $\angle PK'K = \vartheta'$ gesetzt, ist $\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{PK'}{PK} = \frac{r'}{r}$ (I) (da $\triangle PBK \sim PB'K'$). Aus 198 ergiebt sich leicht $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{a r'}{a' r}$ (II). Bezeichnet man ferner den Winkel, den die Verlängerungen von AA' und KK' bilden, mit $\varkappa$, so ist $\operatorname{tg}\varkappa = \frac{a' - a}{c}$ und $\vartheta - \varphi = \varkappa$, $\varphi' - \vartheta' = \varkappa$ (§ 9, 6).

w) Gegeben zwei koncentrische Kreise K. Zu L eine Parallele, welche die Peripherieen der Kreise nacheinander in X, X', Y', Y trifft, so zu ziehen, daß dabei noch eine Bedingung erfüllt wird. Der Mittelpunkt der Sehnen XY und X'Y' sei Z. Bekannt r, r', gesucht $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'KZ = \varphi'$. Es ist $XZ = r \sin\varphi$, $X'Z = r' \sin\varphi'$, $KZ = r \cos\varphi = r' \cos\varphi'$, $XX' = r \sin\varphi - r' \sin\varphi'$, $XY' = r \sin\varphi + r' \sin\varphi'$.

Die fragliche Linie so zu ziehen, daß

200. $XY : X'Y' = m : n$. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m r'}{n r}$, $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{r'}{r}$ (§ 9, 3).

201. $XX' = a$. Aufl. $\varphi - \varphi'$ aus $\triangle XKX'$, dann $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{r'}{r}$ (§ 7, 6).

202. $XY' = a$. Aufl. $\varphi + \varphi'$ aus $\triangle XKY'$, φ und φ' wie 201 (§ 7, 5).

203. $\angle XKX' = \alpha$ (§ 7, 6). 204. $\angle XKY' = \alpha$ (§ 7, 5).

x) Gegeben P und zwei koncentrische Kreise K. Durch P eine Linie, welche die Peripherieen der Kreise nacheinander in X, X', Y', Y schneidet, so zu ziehen, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Die Bezeichnungen bleiben wie in 200 bis 204, und auch die Berechnung von φ und φ' ist dieselbe. Gegeben ist außerdem noch $KP = e$, gesucht $\angle PKZ = \psi$. Es ist $\cos\psi = \frac{r \cos\varphi}{e} = \frac{r' \cos\varphi'}{e}$.

Durch P eine Linie so zu ziehen, daß

205. $XY : X'Y' = m : n$ (200). 206. $XX' = a$ (201).

Hosted by Google

207. $XY' = a$ (202). 208. $\angle XKX' = \alpha$ (203).

209. $\angle XKY' = \alpha$ (204).

210. $PX = PY'$. Aufl. $PX = r \sin\varphi - e \sin\psi$, $PY' = r' \sin\varphi' + e \sin\psi$, daher $r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = 2e \sin\psi$, ferner $r \cos\varphi + r' \cos\varphi' = 2e \cos\psi$. Quadriert und addiert man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\cos(\varphi + \varphi') = \frac{4e^2 - r^2 - r'^2}{2rr'}$

oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \sqrt{\frac{(r + r')^2 - 4e^2}{4e^2 - (r - r')^2}}$, dann wie 204.

y) Gegeben K, K' und P zwischen beiden auf der Centrale. Durch P eine Linie zu ziehen, welche K in X, K' in X' (hier die zunächstliegenden Durchschnittspunkte) so schneidet, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt r, r', $PA = a$, $PA' = a'$, gesucht, wenn KZ und K'Z' auf die Verlängerungen von XX' senkrecht gefällt werden, $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'KZ' = \varphi'$, $\angle PKZ = PK'Z' = \psi$. Es ist $PX = a \sin\psi - r \sin\varphi$, $PX' = a' \sin\psi - r' \sin\varphi'$, $r \cos\varphi = a \cos\psi$, $r' \cos\varphi' = a' \cos\psi$.

Durch P die Linie XX' so zu ziehen, daß

211. $PX = PX'$. Aufl. $r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = (a - a') \sin\psi$ und $r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = (a - a') \cos\psi$. Durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen erhält man $\cos(\varphi - \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - (a - a')^2}{2rr'}$, daher $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')^2 = \frac{(a - a')^2 - (r - r')^2}{(r + r')^2 - (a - a')^2}$.

Dann findet man φ und φ' aus $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{ar'}{a'r}$ (§ 7, 6) und $\cos\psi = \frac{r\cos\varphi}{a} = \frac{r'\cos\varphi'}{a'}$.

212. $PX : PX' = m : n$. Aufl. $nr \sin\varphi - mr' \sin\varphi' = (na - ma') \sin\psi$, $nr \cos\varphi - mr' \cos\varphi' = (na - ma') \cos\psi$. Durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen ergiebt sich

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{n^2r^2 + m^2r'^2 - (na - ma')^2}{2mnrr'} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') = \sqrt{\frac{(na - ma')^2 - (nr - mr')^2}{(nr + mr')^2 - (na - ma')^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n(a + r) - m(a' + r'))\,(n(a - r) - m(a' - r'))}{(n(a + r) - m(a' - r'))\,(-n(a - r) + m(a' + r'))}}.$$

z) Gegeben K, K' und P. Durch P eine Linie, welche K in X und K' in X' schneidet (hier so, daß KK' nicht von XX' geschnitten wird), so zu ziehen, daß PX und PX' noch einer Bedingung genügen. Bekannt ist r, r', $PK = e$, $PK' = e'$, $KK' = c$, daraus die

Hosted by Google

Winkel von $\triangle$ KK′P zu berechnen, also auch $\mathrm{KPK'} = \gamma$. Gesucht wird, wenn man auf die Verlängerungen von XX′ die Senkrechten KZ und K′Z′ fällt, $\angle\,\mathrm{XKZ} = \varphi$, $\angle\,\mathrm{X'K'Z'} = \varphi'$, $\angle\,\mathrm{PKZ} = \psi$, $\angle\,\mathrm{PK'Z'} = \psi'$, wobei $\psi + \psi' = \gamma$. Es ist $\mathrm{PX} = \mathrm{e}\sin\psi - \mathrm{r}\sin\varphi$, $\mathrm{PX'} = \mathrm{e'}\sin\psi' - \mathrm{r'}\sin\varphi'$, $\mathrm{r}\cos\varphi = \mathrm{e}\cos\psi$, $\mathrm{r'}\cos\varphi' = \mathrm{e'}\cos\psi'$.

Eine Linie durch P so zu ziehen, daß

213. $\mathrm{PX} = \mathrm{PX'}$. Aufl. $\mathrm{r}\sin\varphi - \mathrm{r'}\sin\varphi' = \mathrm{e}\sin\psi - \mathrm{e'}\sin\psi'$ und $\mathrm{r}\cos\varphi + \mathrm{r'}\cos\varphi' = \mathrm{e}\sin\psi + \mathrm{e'}\sin\psi'$. Quadriert und addiert man beide Gleichungen, so entsteht $\mathrm{r}^2 + \mathrm{r'}^2 + 2\,\mathrm{rr'}\cos(\varphi + \varphi') = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e'}^2 + 2\,\mathrm{ee'}\cos\gamma$. Die rechte Seite ist nach § 3, 10 zu berechnen, dann ein Ausdruck für $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ zu entwickeln. Zur Berechnung von φ, φ', ψ, ψ' dienen $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}}$, $\frac{\cos\varphi'}{\cos\psi'} = \frac{\mathrm{e'}}{\mathrm{r'}}$ in Verbindung mit $\psi + \psi' = \gamma$ und dem berechneten Werte für $\varphi + \varphi'$ (§ 9, 9).

214. $\mathrm{PX} : \mathrm{PX'} = \mathrm{m} : \mathrm{n}$. Aufl. Ähnlich wie in 212 und 213 findet man $\mathrm{n}^2\mathrm{r}^2 + \mathrm{m}^2\mathrm{r'}^2 + 2\,\mathrm{mnrr'}\cos(\varphi + \varphi') = \mathrm{n}^2\mathrm{e}^2 + \mathrm{m}^2\mathrm{e'}^2 + 2\,\mathrm{mnee'}\cos\gamma$. Die rechte Seite ist nach § 3, 10 zu berechnen, und dann ein Ausdruck für $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ aufzustellen. φ, φ' ψ, ψ' werden berechnet wie 213.

aa) Gegeben K, K′. Eine Linie $\mathrm{XX'} = \mathrm{a}$ (X auf K, X′ auf K′) so zu ziehen, daß sie

215. parallel KK′ wird. Aufl. Bekannt a, r, r′, $\mathrm{AA'} = \mathrm{c}$, gesucht, wenn auf die Verlängerungen von XX′ die Senkrechten KZ und KZ′ gefällt werden, $\angle\,\mathrm{XKZ} = \varphi$, $\angle\,\mathrm{X'K'Z'} = \varphi'$. Es ist $\mathrm{r}\sin\varphi + \mathrm{r'}\sin\varphi' = \mathrm{c} - \mathrm{a}$, $\mathrm{r}\cos\varphi - \mathrm{r'}\cos\varphi' = 0$. Beide Gleichungen quadriert und addiert giebt $\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\mathrm{r}^2 + \mathrm{r'}^2 - (\mathrm{c} - \mathrm{a})^2}{2\,\mathrm{rr'}}$ oder $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')^2 = \frac{(\mathrm{c} - \mathrm{a})^2 - (\mathrm{r} - \mathrm{r'})^2}{(\mathrm{r} + \mathrm{r'})^2 - (\mathrm{c} - \mathrm{a})^2}$, ferner $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\mathrm{r'}}{\mathrm{r}}$ (§ 7, 5).

216. parallel L wird. Aufl. ähnlich wie 215. Bekannt ist noch $\angle\,(\mathrm{L}, \mathrm{KK'}) = \alpha$. Aus den Gleichungen $\mathrm{r}\sin\varphi + \mathrm{r'}\sin\varphi' = \mathrm{c}\cos\alpha - \mathrm{a}$ und $\mathrm{r}\cos\varphi - \mathrm{r'}\cos\varphi' = \mathrm{c}\sin\alpha$ findet man durch Quadrieren und Addieren $\mathrm{r}^2 + \mathrm{r'}^2 - 2\,\mathrm{rr'}\cos(\varphi + \varphi') = \mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{ac}\cos\alpha$. Die rechte Seite ist nach § 3, 10 zu berechnen, dann ein Ausdruck für $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ zu gewinnen. Zur Berechnung von φ und φ' dient $\mathrm{r}\cos\varphi - \mathrm{r'}\cos\varphi' = \mathrm{c}\sin\alpha$ (§ 3, 5).

Hosted by Google

bb) Gegeben K, K′, K″. An K″ eine Tangente so zu ziehen, daß, wenn man an K und K′ Tangenten konstruiert, die auf der ersten senkrecht stehen, noch eine Bedingung erfüllt wird. Die Berührungspunkte an K, K′, K″ sind bezüglich Y, Y′, Y″, die Tangente an K″ sei XX′, und YX ⊥ XX′, Y′X′ ⊥ XX′. Hier werde nur der Fall betrachtet, daß alle drei Kreise auf derselben Seite von XX′ und zwischen XY und X′Y′ liegen. Bekannt ist r, r′, r″, KK″ = a, K′K″ = a′, ∠ KK″K′ = γ, sowie sämtliche Stücke von △ KK′K″, gesucht, wenn man ZZ′ ∥ XX′ durch K″ zieht, ∠ KK″Z = φ, ∠ K′K″Z′ = φ′. Es ist XY = a sin φ + r″, X′Y′ = a′ sin φ′ + r″, XY″ = a cos φ + r, X′Y″ = a′ cos φ′ + r′, φ + φ′ = π − γ.

An K, K′, K″ drei Tangenten, von denen zwei auf der dritten senkrecht stehen, so zu ziehen, daß

217. XY = X′Y′ (§ 7, 1). 218. XY″ = X′Y″ (§ 3, 5).

219. XY = X′Y″. Aufl. a sin φ − a′ sin $(\frac{1}{2}\pi - \varphi')$ = r − r′ (§ 3, 4).

220. XY + X′Y′ = s (§ 3, 3) 223. XY″ − X′Y″ = d (§ 3, 5)

221. XY − X′Y′ = d (§ 3, 3) 224. XY : X′Y′ = m : n (§ 3, 3)

222. XX′ = b (§ 3, 5) 225. XY″ : X′Y″ = m : n (§ 3, 5)

226. XY″ : X′Y′ = m : n. Aufl. ma′ sin φ′ − na sin $(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ = nr − mr″ (§ 3, 4).

227. XY + X′Y′ = XX′. Aufl. a (sin φ − cos φ) + a′ (sin φ′ − cos φ′) = r + r′ − 2 r″, daher a sin $(\varphi - \frac{1}{4}\pi)$ + a′ sin $(\varphi' - \frac{1}{4}\pi)$ = $\frac{r + r' - 2r''}{\sqrt{2}}$ (§ 3, 3).

§ 40.

Gegeben gerade Linien, Punkte, Kreise; gesucht ein Kreis.

a) Gegeben P, P′, P″. Um P″ einen Kreis so zu beschreiben, daß die an ihn gezogenen Tangenten PX und P′X′ eine Bedingung erfüllen. Bekannt PP″ = e, P′P″ = e′, sowie alle Stücke von △ PP′P″. Gesucht ∠ PP″X = φ, P′P″X′ = φ′, Radius x. Es ist e cos φ = e′ cos φ′, PX = e sin φ, P′X′ = e′ sin φ′.

Um P″ einen Kreis zu beschreiben, so daß, wenn die Tangenten PX und P′X′ an ihn gezogen werden,

1. PX : P′X′ = m : n. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{me'}{ne}$, $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{e'}{e}$ (§ 9, 3).

Hosted by Google

2. $PX + P'X' = s$. Aufl. $e \sin\varphi + e' \sin\varphi' = s$, $e \cos\varphi - e' \cos\varphi' = 0$. Dann wie § 39, 215.
3. $PX - P'X' = d$ (2).

b) Gegeben P innerhalb $\angle ACB$. Um P einen Kreis, der CA in X und Y (X näher an C), CB in X' und Y' so schneidet, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt $\angle ACP = \alpha$, $\angle BCP = \alpha'$, $CP = e$, gesucht $PX = x$, $\angle XPY = 2\varphi$, $\angle X'PY' = 2\varphi'$. Es ist $x \cos\varphi = e \sin\alpha$, $x \cos\varphi' = e \sin\alpha'$, also $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, ferner $XY = 2x \sin\varphi = 2e \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$, $X'Y' = 2e \sin\alpha' \operatorname{tg}\varphi'$, $CX = e \cos\alpha - \frac{1}{2} XY = e \cos\alpha - e \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi = \frac{e \cos(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi}$, ebenso $CX' = \frac{e \cos(\alpha' + \varphi')}{\cos\varphi'}$, $CY = \frac{e \cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$, $CY' = \frac{e \cos(\alpha' - \varphi')}{\cos\varphi'}$.

Um P einen Kreis, der CA in X und Y, CB in X' und Y' trifft, so zu bestimmen, daß

4. $\angle XPX' = \gamma$ (§ 7, 5).
5. $\angle YPY' = \gamma$ (§ 7, 5).
6. $\angle XPY' = \gamma$ (§ 7, 6).
7. $XY \cdot X'Y' = m : n$. Aufl. $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{n}$ (§ 9, 3).
8. $XX' \parallel L$. Aufl. Bekannt $\angle CXX' = \beta$, $\angle CX'X = \beta'$. Es ist $\varphi - \varphi' = \angle CXP - CX'P = \beta - \beta'$ (§ 7, 6).
9. $YY' \parallel L$ (8).
10. $XY' \parallel L$ (8; § 7, 5).
11. $CX : CX' = m : n$ (8).
12. $CY : CY' = m : n$ (9).
13. $CX : CY' = m : n$ (10).

c) Gegeben $\triangle ABC$ und P auf AB. Um P einen Kreis, der AC in X und BC in X' so schneidet, daß noch einer Bedingung genügt wird. Bekannt sämtliche Stücke von $\triangle ABC$, $AP = c_1$, $BP = c_2$, leicht daraus zu berechnen $\angle ACP = \gamma_1$, $\angle BCP = \gamma_2$, gesucht $\angle APX = \psi$, $BPX' = \psi'$ und $PX = PX' = x$. Es ist $x = \frac{c_1 \sin\alpha}{\sin(\alpha + \psi)} = \frac{c_2 \sin\beta}{\sin(\beta + \psi')}$, daher $\frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin(\beta + \psi')} = \frac{c_1 \sin\alpha}{c_2 \sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, $AX = \frac{c_1 \sin\psi}{\sin(\alpha + \psi)}$, $BY = \frac{c_2 \sin\psi'}{\sin(\beta + \psi')}$.

Um P einen Kreis, der AC in X, BC in X' trifft, so zu beschreiben, daß

14. $AX = BY$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin(\beta + \psi')} = \frac{c_1 \sin\alpha}{c_2 \sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§ 9, 10).

Hosted by Google

15. $AX : BY = m : n$ (14).

16. $\triangle APX = BPY$. Aufl. $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{c_2}{c_1}$, $\frac{\sin(\alpha+\psi)}{\sin(\beta+\psi')} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ (§ 9, 10).

d) Gegeben P, P′ und L. Um P′ einen Kreis, der L in X′ und Y′ schneidet, so zu beschreiben, daß, wenn man an ihn die Tangente PX zieht,

17. $PX = X'Y'$. Aufl. Bekannt ist $PP' = e$, die von P′ auf L gefällte Senkrechte a, gesucht $\angle PP'X = \varphi$, $\angle X'P'Y' = 2\varphi'$. Es ist $PX = e\cos\varphi$, $P'X' = \frac{a}{\cos\varphi'}$, also $\cos\varphi\cos\varphi' = \frac{a}{e}$. Ferner $PX = e\sin\varphi$, $X'Y' = 2a\operatorname{tg}\varphi'$, folglich $e\sin\varphi = 2a\operatorname{tg}\varphi'$. Eliminiert man φ, so ergiebt sich $\operatorname{tg}\varphi'^2 = \frac{e^2-a^2}{5a^2}$.

18. $PX : X'Y' = m : n$. Aufl. ähnlich wie 17. $\operatorname{tg}\varphi'^2 = \frac{n^2(e^2-a^2)}{(n^2+4m^2)a^2}$.

e) Gegeben P und K. Um P soll ein Kreis beschrieben werden, der noch eine Bedingung erfüllt. Ist X ein Durchschnittspunkt beider Kreise, so kommt die Auflösung stets auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks PKX hinaus, von welchem $PK = e$, $KX = r$ bekannt ist.

Um P einen Kreis zu beschreiben, welcher

19 K rechtwinklig schneidet (P außerhalb K).

20. die Peripherie von K halbiert.

21. dessen Peripherie von K halbiert wird (P innerhalb K).

22. Gegeben P, K, K′. Um P einen Kreis zu beschreiben, der K und K′ unter gleichen Sehnen XY und X′Y′ schneidet. Aufl. Bekannt $PK = e$, $PK' = e'$, $\angle KPK' = \alpha$, gesucht $\angle PKX = \varphi$, $\angle PK'X' = \varphi'$, $\angle XPK = X'PK' = \psi$, $PX = PX' = x$. Es ist $r\cos\varphi + x\cos\psi = e$, $r'\cos\varphi' + x\cos\psi = e'$, folglich $r\cos\varphi - r'\cos\varphi' = e - e'$, ferner $r\sin\varphi - r'\sin\varphi' = 0$. Beide Gleichungen quadriert und addiert, giebt $\cos(\varphi-\varphi') = \frac{r^2+r'^2-(e-e')^2}{2rr'}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')^2 = \frac{(e-e')^2-(r-r')^2}{(r+r')^2-(e-e')^2}$, dann φ und φ' nach § 7, 2, endlich ψ aus $\frac{\sin(\psi+\varphi)}{\sin\psi} = \frac{e}{r}$ oder $\frac{\sin(\psi+\varphi')}{\sin\psi} = \frac{e'}{r}$ (§ 7, 2).

23. Gegeben P, K, K′. Um P einen Kreis zu beschreiben, so daß die von seiner Peripherie an K und K′ gezogenen gemeinschaftlichen (hier äußeren) Tangenten XY und X′Y′ (Y auf K, Y′ auf K′)

Hosted by Google

einander gleich werden. Aufl. Bekannt r, r', PK = e, PK' = e', ∠ KPK', gesucht ∠ PKY = φ, ∠ PK'Y' = φ', PX = PX' = x. Es ist KY = e cos φ + x, K'Y' = e' cos φ' + x, daher e cos φ − e' cos φ' = r − r', ferner XY = e sin φ, X'Y' = e' sin φ', also e sin φ − e' sin φ' = 0, dann wie 22.

24. Gegeben zwei koncentrische Kreise K und P zwischen ihren Peripherieen. Um P einen Kreis, der die Peripherie des einen Kreises in X, die des anderen in Y trifft, so zu beschreiben, daß KXY eine gerade Linie wird. Aufl. Gegeben r, r' (r > r'), KP = e, gesucht ∠ PKX = φ, PX = PY = x. Aus △ PYK und PXK findet man $x^2 = a^2 + r'^2 - 2ar' \cos\varphi$, und $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi$, daher $\cos\varphi = \frac{r^2 - r'^2}{2a(r - r')} = \frac{r + r'}{2a}$.

f) Einen Kreis zu bestimmen, dessen Mittelpunkt M auf L liegt und der

25. durch P und P' geht (§ 38, 55).

26. durch P geht und K berührt (§ 38, 54).

27. K und K' berührt (§ 38, 54).

28. durch P geht und L' berührt. 1. Aufl. Er berühre L' in X, L und L' schneiden sich in A. Bekannt ist die auf L gefällte Senkrechte PA = a und AQ = b, ∠ AMX = β, gesucht MX = x und ∠ PMQ = ψ. Es ist $x \sin\psi = a$ und $b = x\cos\psi + \frac{x}{\cos\beta}$, daher $b\cos\beta\sin\psi - a\cos\beta\cos\psi = a$ (§ 3, 1). 2. Aufl. Als bekannt kann man auch betrachten PA = e, ∠ PAQ = α. Dann ist $\sin(\psi - \alpha) = \frac{a}{e\cos\beta}$.

29. durch P geht und L' unter dem gegebenen Winkel γ schneidet. Ähnlich wie 28. Der Kreis schneide L' in X und Y, Z sei die Mitte von XY, ∠ AMZ = β. 1. Aufl. $b\cos\beta\sin\psi - a\cos\beta\cos\psi = a\cos\gamma$ (§ 3, 1). 2. Aufl. $\sin(\psi - \alpha) = \frac{a\cos\gamma}{e\cos\beta}$.

30. durch P geht und L unter der Sehne 2 s schneidet. Aufl. Bezeichnungen wie 29. $x\sin\psi = e\sin\alpha$, $s = x\sin\varphi$ und $e\cos\alpha = x\cos\psi + \frac{s\cot\varphi}{\cos\beta}$. Nach Elimination von x und ψ erhält man $(e^2+s^2)\cos 2\varphi - 2es\cos\alpha\sin 2\varphi = s^2\cos 2\beta - e$ (§ 3, 1).

31. L' berührt und L'' unter dem Winkel α schneidet. Aufl. Bekannt ∠ (LL') = γ, α und das von L, L', L'' gebildete Dreieck, gesucht der Radius x und die Winkel φ und ψ, welche CM mit L und L' bildet. Es ist $CM\sin\varphi = x$ und $CM\sin\psi = x\cos\alpha$, daher $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \cos\alpha$ (§ 7, 1).

Hosted by Google

32. L' unter dem Winkel α, L'' unter dem Winkel β schneidet. Aufl. ähnlich wie 31. $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ (§ 7, 1).

33. L' und K' berührt. Aufl. Er berühre L' in X, L und L' schneiden sich in A. Bekannt r, $AK = e$, $\angle KAM = \alpha$, $MAX = \beta$, gesucht $\angle KMA = \psi$, $MX = x$. Es ist, wenn $KQ \perp AM$, $(x + r)\sin\psi = e\sin\alpha$ und $e\cos\alpha = AQ = AM - MQ = \frac{x}{\sin\beta} - (x + r)\cos\psi$. Nach Elimination von x ergiebt sich $(e\cos\alpha\sin\beta + r)\sin\psi + e\sin\alpha\sin\beta\cos\psi = e\sin\alpha$ (§ 3, 1).

34. L' unter dem Winkel γ schneidet und K berührt. Aufl. wie 33. $(e\cos\alpha\sin\beta + r\cos\gamma)\sin\psi + e\sin\alpha\sin\beta\cos\psi = e\sin\alpha\cos\gamma$ (§ 3, 1).

g) Gegeben P, P', L. PP' schneide L in A. Bekannt $\angle(L, PP') = \alpha$, $AP = a$, $AP' = a'$, gesucht $\angle PMP' = \varphi$ und der Radius x.

Einen Kreis zu bestimmen, der

35. durch P und P' geht und L berührt. Aufl. Der Berührungspunkt sei X. Man ziehe durch M eine Parallele zu L bis sie die von P und P' auf L gefällten Senkrechten trifft. Es ist dann $2x\sin\varphi = a' - a$, $a\sin\alpha = x + x\cos(\alpha + \varphi)$, $a'\sin\alpha = x + x\cos(\alpha - \varphi)$ (die erste Gleichung ist eine Folge der beiden letzten). Man findet, wenn man x eliminiert, $(a' + a)\sin\alpha\sin\varphi - (a' - a)\cos\alpha\cos\varphi = a' - a$ (§ 3, 1), oder auch $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)} \sqrt{\frac{a}{a'}}$ (§ 7, 11).

36. durch P und P' geht und L unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. ähnlich wie 35. $(a' + a)\sin\alpha\sin\varphi - (a' - a)\cos\alpha\cos\varphi = (a' - a)\cos\gamma$.

37. durch P und P' geht und L unter der Sehne 2 s schneidet. Aufl. Er schneide L in X und Y, $\angle XMY = \psi$. Auf ähnliche Weise wie in 35 gelangt man zu den Gleichungen $2x\sin\varphi = a' - a$, $x\sin\psi = s$, $x\cos\psi + x\cos(\alpha - \varphi) = a'\sin\alpha$, $x\cos\psi + x\cos(\alpha + \varphi) = a\sin\alpha$, von denen die erste aus den beiden letzten folgt. x und φ sind zu eliminieren, dann findet man $4s^2\sin\alpha^2\cot\psi^2 - 4(a' + a)s\sin\alpha\cot\psi + (a' + a)^2\sin\alpha^2 + (a' - a)^2\cos\alpha^2 - 4s^2\cos\alpha^2 = 0$.

h) Gegeben P, L und L'. L und L' schneiden sich in A. Bekannt $AP = e$, $\angle(L, AP) = \alpha$, $\angle(L', AP) = \alpha'$, gesucht $\angle(L, AM) = \psi$, $\angle(L', AM) = \psi'$, Radius x, $AM = y$.

Hosted by Google

Einen Kreis zu beschreiben, der

38. L in P berührt und L′ unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. $y \sin\psi = x$, $y \sin\psi' = x \cos\gamma$, daher $\frac{\sin\psi'}{\sin\psi} = \cos\gamma$ (§ 7, 5).

39. L in P berührt und L′ unter der Sehne 2 s schneidet. Aufl. Es ist $y \cos\psi = e$, $y \sin\psi = x$, $y \sin\psi' = \sqrt{x^2 - s^2}$. Die Elimination von x und y ergiebt $e^2 \cos 2\psi' - (s^2 + e^2) \cos 2\psi = s^2$ (§ 3, 5).

40. L und L′ berührt und durch P geht. Aufl. $\psi = \psi' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$. Setzt man $\angle$ APM $= \varphi$, so ist $\sin\varphi = \frac{y \sin PAM}{x} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}$.

41. L berührt, L′ unter dem Winkel γ schneidet und durch P geht. Aufl. wie 38, dann, $\angle$ APM $= \varphi$ gesetzt, $\sin\varphi = \frac{y \sin MAP}{x} = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi' - \alpha')}{\sin\psi}$.

42. L unter dem Winkel γ, L′ unter dem Winkel γ' schneidet und durch P geht. Aufl. $y \sin\psi = x \cos\gamma$, $y \sin\psi' = x \cos\gamma'$, daher $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}$ (§ 7, 5). Dann, $\angle$ APM $= \varphi$ gesetzt, ist $\sin\varphi = \frac{y \sin PAM}{x} = \frac{\sin(\alpha - \psi)\cos\gamma}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi' - \alpha')\cos\gamma'}{\sin\psi'}$.

i) Gegeben L, L′, L″. Bekannt sämtliche Stücke des von L, L′, L″ gebildeten Dreiecks ABC. In den folgenden Aufgaben sind die Winkel, welche MA, MB, MC mit den Seiten bilden, entweder die Hälften der ganzen Dreieckswinkel, oder sie lassen sich aus denselben berechnen, wie ψ und ψ' in 38 und 42.

Einen Kreis zu beschreiben, der

43. L und L′ berührt, L″ unter dem Winkel γ schneidet.

44. L berührt, L′ unter dem Winkel γ', L″ unter dem Winkel γ'' schneidet.

45. L, L′, L″ bezüglich unter den Winkeln γ, γ', γ'' schneidet.

Gegeben L, L′, K. L und L′ schneiden sich in A. Bekannt r, AK $= e$, $\angle$ (L, AK) $= \alpha$, $\angle$ (L′, AK) $= \alpha'$, gesucht $\angle$ (L, AM) $= \psi$, $\angle$ (L′ AM) $= \psi'$, Radius x, AM $= y$, $\angle$ AKM $= \varphi$.

Einen Kreis zu beschreiben, der

46. L, L′ und K berührt. Aufl. $\psi = \psi' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$. Ferner $y \sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = x$, und (aus $\triangle$ AMK) $y = \frac{e \sin\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi)}$,

Hosted by Google

$x + r = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi)}$. Die Elimination von x und y ergiebt $e \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') \sin \varphi + r \sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi) = e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$ (§ 3, 3).

47. L und K berührt, L′ unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. wie 46. $e \sin \psi \sin \varphi + r \sin(\alpha - \psi + \varphi) = e \sin(\alpha - \psi)$ (§ 3, 3).

48. K berührt, L und L′ bezüglich unter den Winkeln γ und γ' schneidet. Aufl. wie 46. $y \sin \psi = x \cos \gamma$, $y = \frac{e \sin \varphi}{\sin(\alpha - \psi + \varphi)}$, $x + r = \frac{e \sin(\alpha - \psi)}{\sin(\alpha - \psi + \varphi)}$. Nach Elimination von x und y entsteht $e \sin \psi \sin \varphi + r \cos \gamma \sin(\alpha - \psi + \varphi) = e \cos \gamma \sin(\alpha - \psi)$ (§ 3, 3).

49. Einen Kreis zu beschreiben, der K und L berührt (K in X, L in Y) und dessen Berührungssehne zwischen K und L (XY) = 2 s ist. Aufl. Bekannt r, die von K auf L gefällte Senkrechte KA, gesucht $\angle$ XMY = 2φ und Radius x. Man ziehe durch M eine Parallele zu AY. Es ist $x \sin \varphi = s$, $a = x + (x + r) \sin(2\varphi - \frac{1}{2}\pi) = x - (x + r) \cos 2\varphi$. Durch Elimination von x ergiebt sich $a \sin \varphi = s - s \cos 2\varphi - r \sin \varphi \cos 2\varphi$ oder $a \sin \varphi = 2s \sin \varphi^2 - r \sin \varphi \cos 2\varphi$, endlich, nachdem man durch $\sin \varphi$ dividiert hat, $2r \sin \varphi^2 + 2s \sin \varphi - (a + r) = 0$.

50. Einen Kreis zu beschreiben, welcher L und K berührt und durch P geht. Aufl. Bekannt r und die auf L gefällten Senkrechten KA = b, PB = b′, AB = a, gesucht der Radius x, $\angle$ AKM = φ, $\angle$ BPM = φ'. Es ist $x + (r + x) \cos \varphi = b$, $x + x \cos \varphi' = b'$ und $(r + x) \sin \varphi + x \sin \varphi' = a$. Aus den ersten beiden Gleichungen findet man $r + x = \frac{b + r}{2 \cos \frac{1}{2}\varphi^2}$ (I) und $x = \frac{b'}{2 \cos \frac{1}{2}\varphi'^2}$ (II). Diese Werte in die dritte Gleichung eingesetzt, giebt $(b + r) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + b' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi' = a$ (III). Durch Subtraktion von (I) und (II) erhält man $(b + r) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2 - b' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'^2 = b' - b + r$ (IV). Aus (III) und (IV) ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'$ algebraisch zu berechnen.

51. Einen Kreis zu beschreiben, welcher L, K und K′ berührt. Aufl. Bekannt r, r′ und die auf L gefällten Senkrechten KA = b, K′A′ = b′, AA′ = a, gesucht der Radius x, $\angle$ AKM = φ, $\angle$ A′K′M = φ'. Ähnlich wie in 50 findet man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'$ aus $(b + r) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + (b' + r') \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi' = a$, $(b + r) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2 - (b' + r') \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'^2 = b' - r' - b + r$.

Hosted by Google

k) Für die Aufgaben 52 bis 73 ist folgendes zu beachten:

α) Wenn ein Kreis M durch P geht und K berührt, ist $MK - MP = r$.

β) Wenn ein Kreis M durch P geht und K rechtwinklig schneidet, ist $MK^2 - MP^2 = r^2$.

γ) Wenn ein Kreis M durch P geht und die Peripherie von K halbiert, so ist $MP^2 - MK^2 = r^2$.

δ) Wenn ein Kreis M durch P geht und seine Peripherie von K halbiert wird, so ist $MK^2 + MP^2 = r^2$.

ε) Wenn ein Kreis M die Kreise K und K′ (von außen) berührt, ist $MK - MK' = r - r'$.

ζ) Wenn ein Kreis M die Kreise K und K′ rechtwinklig schneidet, ist $MK^2 - MK'^2 = r^2$.

η) Wenn ein Kreis M die Peripherieen von K und K′ halbiert, so ist $MK'^2 - MK^2 = r^2 - r'^2$.

ϑ) Wenn die Peripherie des Kreises M von K und K′ halbiert wird, so ist $MK^2 - MK'^2 = r^2 - r'^2$.

ι) Wenn ein Kreis M den Kreis K rechtwinklig schneidet und die Pheripherie von K′ halbiert, so ist $MK^2 - MK'^2 = r^2 + r'^2$.

κ) Wenn ein Kreis M den Kreis K rechtwinklig schneidet und seine Peripherie von K′ halbiert wird, so ist $MK^2 + MK'^2 = r^2 + r'^2$.

λ) Wenn ein Kreis M die Peripherie von K halbiert und seine Peripherie von K′ halbiert wird, so ist $MK^2 + MK'^2 = r'^2 - r^2$.

Mit Hülfe dieser Sätze sind die folgenden Aufgaben auf § 38, 148 bis 151 zurückzuführen.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher

52. durch P und P′ geht und K berührt (§ 38, 149). 2. Aufl. Bekannt r, sämtliche Stücke von $\triangle PP'K$, wie $PK = e$, $P'K = e'$, $\angle KPP' = \alpha$, $\angle KP'P = \alpha'$, gesucht $MP = x$, $\angle KPM = \psi$, $\angle KP'M = \psi'$, $\angle MKP = \varphi$, $\angle MKP' = \varphi'$. Es ist $\frac{x + r}{e} = \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi + \psi)}$, $\frac{x}{e} = \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \psi)}$, daher, wenn man beides subtrahiert, $\frac{r}{e} = \frac{\sin \psi - \sin \varphi}{\sin (\psi + \varphi)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi + \varphi)}$, und ebenso $\frac{e'}{r} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi' + \varphi')}{\sin \frac{1}{2}(\psi' - \varphi')}$, ferner $\frac{1}{2}(\psi - \varphi) - \frac{1}{2}(\psi' + \varphi') = \frac{1}{2}(\psi - \psi') - \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') - \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \alpha') = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}(\psi + \varphi) - \frac{1}{2}(\psi' - \varphi') = \frac{1}{2}(\psi - \psi') + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') + \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \alpha') = \alpha' + \frac{1}{2}\pi$ (§ 9, 10).

53. durch P und P′ geht und K rechtwinklig schneidet (§ 38, 150).

54. durch P und P′ geht und die Peripherie von K halbiert (§ 38, 150).

Hosted by Google

55. durch P und P′ geht und dessen Peripherie von K halbiert wird (§ 38, 151).
56. durch P geht und K und K′ berührt (§ 38, 149).
57. durch P geht und K und K′ rechtwinklig schneidet (§ 38, 150).
58. durch P geht, K rechtwinklig schneidet und die Peripherie von K′ halbiert (§ 38, 150).
59. durch P geht, K rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie von K′ halbiert wird (§ 38, 151).
60. durch P geht und die Peripherieen von K und K′ halbiert (§ 38, 150).
61. durch P geht, die Peripherie von K halbiert, und dessen Peripherie von K′ halbiert wird (§ 38, 151).
62. durch P geht, und dessen Peripherie von K und K′ halbiert wird (§ 38, 150).
63. K, K′, K″ berührt (Apollonisches Berührungsproblem) (§ 38, 149).
64. K, K′, K″ rechtwinklig schneidet (§ 38, 150).
65. K und K′ rechtwinklig schneidet und die Peripherie von K″ halbiert (§ 38, 150).
66. K und K′ rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie durch K″ halbiert wird (§ 38, 151).
67. K rechtwinklig schneidet und die Peripherieen von K′ und K″ halbiert (§ 38, 150).
68. K rechtwinklig schneidet, die Peripherie von K′ halbiert und dessen Peripherie von K″ halbiert wird (§ 38, 151).
69. K rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie von K und K′ halbiert wird (§ 38, 151).
70. die Peripherieen von K, K′, K″ halbiert (§ 38, 150).
71. die Peripherieen von K und K′ halbiert und dessen Peripherie von K″ halbiert wird (§ 38, 151).
72. die Peripherie von K halbiert, und dessen Peripherie von K und K′ halbiert wird (§ 38, 151).
73. dessen Peripherie von K, K′, K″ halbiert wird (§ 38, 150).
74. Malfattische Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Dreiecksseiten berührt. 1. Aufl. von Grunert. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise seien X, Y, Z, ihre Radien x, y, z, und zwar berühre der erste AB und AC, der zweite AB und BC, der dritte AC und BC. Der Berührungspunkt der Kreise X und Y sei D, ihre Berührungspunkte mit AB bezüglich G und H. Bekannt $\triangle$ ABC, gesucht x, y, z. Zieht man durch X eine Parallele zu AB, bis sie YH in L trifft, so ist $GH^2 = XL^2 = XY^2 - YL^2$

Hosted by Google

$= (x + y)^2 + (y - x)^2 = 4xy$, ferner $AG = x \cot \frac{1}{2}\alpha$, $BH = y \cot \frac{1}{2}\beta$, folglich $2\sqrt{xy} = c - x \cot \frac{1}{2}\alpha - y \cot \frac{1}{2}\beta$. Durch ähnliche Behandlung der anderen Kreise ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2\sqrt{xy} &= c - x \cot \tfrac{1}{2}\alpha - y \cot \tfrac{1}{2}\beta \\ 2\sqrt{yz} &= a - y \cot \tfrac{1}{2}\beta - z \cot \tfrac{1}{2}\gamma \quad \text{(I)}. \\ 2\sqrt{zx} &= b - z \cot \tfrac{1}{2}\gamma - y \cot \tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

Multipliziert man von diesen Gleichungen die zweite mit $\sin\beta$, die dritte mit $\sin\alpha$ und subtrahiert dann beide, so erhält man $2\sqrt{yz}\sin\beta - 2\sqrt{zx}\sin\alpha = -2y\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 2x\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + z\cot\frac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta)$, und da $\cot\frac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta) = \cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\sin\frac{1}{2}\beta^2$ ist, so ergiebt sich $\sqrt{yz}\sin\beta - \sqrt{zx}\sin\alpha = -y\cos\frac{1}{2}\beta^2 + x\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + z\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - z\sin\frac{1}{2}\beta^2$, oder $y\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 2\sqrt{yz}\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta + z\sin\frac{1}{2}\beta^2 = x\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\sqrt{xz}\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha + z\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, oder nach Ausziehung der Quadratwurzel $\sqrt{y}\cos\frac{1}{2}\beta + \sqrt{z}\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{x}\cos\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{z}\sin\frac{1}{2}\alpha$. Auf beiden Seiten mußte das positive Zeichen genommen werden, da keine der beiden Seiten negativ werden kann. Durch ähnliche Behandlung der ersten und zweiten, ebenso der ersten und dritten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\beta &= \sqrt{x}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\alpha \\ \sqrt{z}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{x}\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{x}\sin\tfrac{1}{2}\beta \quad \text{(II)}. \\ \sqrt{x}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{y}\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{z}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{y}\sin\tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten und dritten dieser Gleichungen ergiebt sich $\sqrt{r}(\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma) = \sqrt{r_1}(\cos\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\gamma)$. Nun ist aber $\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma = 4\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{4}\gamma\cos\frac{1}{4}\beta$ und $\cos\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\gamma = 4\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{4}\gamma\cos\frac{1}{4}\alpha$, folglich

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{4}\alpha}{\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{4}\beta} = \frac{\cos\frac{1}{4}(\pi-\beta)\cos\frac{1}{4}\alpha}{\cos\frac{1}{4}(\pi-\alpha)\cos\frac{1}{4}\beta} = \frac{(\cos\frac{1}{4}\beta + \sin\frac{1}{4}\beta)\cos\frac{1}{4}\alpha}{(\cos\frac{1}{4}\alpha + \sin\frac{1}{4}\alpha)\cos\frac{1}{4}\beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha} \quad \text{(III)}$$

und ebenso

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha} \quad \text{(IV)}.$$

Aus der ersten Gleichung (I) folgt

$$\frac{c}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x}{y}}\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{y}{x}}\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2.$$

Setzt man rechts den in (III) gefundenen Wert für $\sqrt{\frac{x}{y}}$ ein, und beachtet, daß

Hosted by Google

$\sqrt{\frac{x}{y}} \cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta)(1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha^2)}{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha)\,2\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha} = \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta)(1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha}$

ist, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{c}{\sqrt{rr_1}} = \frac{(\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta)(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{4}\beta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\,(\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta)+\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta))}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\pi)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta} = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren mit der zweiten und dritten Gleichung (I) erhält man die drei Gleichungen $\sqrt{xy} = \frac{c\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}\gamma}$,

$\sqrt{yz} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{4}\alpha}$, $\sqrt{zx} = \frac{b\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{4}\beta}$.

Wenn man von diesen drei Gleichungen die erste und dritte multipliziert und durch die zweite dividiert, ferner für b und c ihre Werte $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ und $\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ einsetzt, erhält man nach einigen Umformungen

$$x = \frac{2\sqrt{2}\,a\cos\frac{1}{4}\alpha\sin\frac{1}{4}\beta\sin\frac{1}{4}\gamma\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)}$$

und ähnliche Ausdrücke für y und z. 2. Aufl. von Schellbach. Die Bezeichnungen bleiben dieselben, nur werde jetzt AG mit x, BH mit y, und die Entfernung des Punktes C von dem Berührungspunkte des Kreises Z und der Linie CA mit z bezeichnet. Dann ist $XG = x\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $YH = y\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $XY = x\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + y\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $GH = XL = c - x - y$, $YL = y\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta - x\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$. Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung $XY^2 = XL^2 + YL^2$ ergiebt sich $x + y + 2\sqrt{xy\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta} = c$. Bezeichnet man nun $a + b + c$ mit $2s$, so ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, mithin $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = 1 - \frac{c}{s}$.

Setzt man $1 - \frac{c}{s} = \cos\varphi^2$ oder $c = s\sin\varphi^2$ (I), so ergiebt sich $x + y + 2\sqrt{xy}\cos\varphi = s\sin\varphi^2$ (II). Analog erhält man, wenn man $b = s\sin\chi^2$ (Ia) und $a = s\sin\psi^2$ (Ib) setzt, $x + z + 2\sqrt{xz}\cos\chi = s\sin\chi^2$ (IIa) und $y + z + 2\sqrt{yz}\cos\psi = s\sin\psi^2$ (IIb). Setzt man ferner $x = s\sin\lambda^2$, $y = s\sin\mu^2$, $z = s\sin\nu^2$, so geht (II) über in $\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 + 2\sin\lambda\sin\mu\cos\varphi$

Hosted by Google

$= 1 - \cos\varphi^2$ oder $\cos\varphi^2 + 2\sin\lambda\sin\mu\cos\varphi + \sin\lambda^2\sin\mu^2 = 1 - \sin\lambda^2 - \sin\mu^2 + \sin\lambda^2\sin\mu^2$ oder $\cos\varphi + \sin\lambda\sin\mu = \pm\cos\lambda\cos\mu$; daher ist $\cos\varphi = \pm\cos(\lambda \pm \mu)$, wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Folglich ist entweder $\lambda + \mu = \varphi$ oder $\lambda - \mu = \pi - \varphi$. Da letzterer Wert für die innerhalb des Dreiecks liegenden Kreise keine Bedeutung hat, so gilt nur $\lambda + \mu = \varphi$; analog $\lambda + \nu = \chi$, $\mu + \nu = \psi$. Durch Addition ergiebt sich $\lambda + \mu + \nu = \frac{1}{2}(\varphi + \chi + \psi) = \sigma$, mithin $\lambda = \sigma - \psi$, also $x = s\sin(\sigma - \psi)^2$ und analog $y = s\sin(\sigma - \chi)^2$, $z = s\sin(\sigma - \varphi)^2$.

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben aus der angewandten Trigonometrie.

§ 41.

Aufgaben über Höhenmessungen.

Bei den Höhenmessungen sind in der Regel zwei Ebenen zu unterscheiden; nämlich die durch den jedesmaligen Standort der Messung gelegte Horizontalebene und eine durch die Vertikale des Standortes und einen Punkt außerhalb derselben gelegte Vertikalebene. Die in der ersteren Ebene liegenden Winkel werden Horizontalwinkel, die in der zweiten gemessenen Vertikalwinkel genannt. Nimmt man als den einen Schenkel eines Vertikalwinkels die horizontale Linie, in welcher eine Vertikalebene des Standorts die Horizontalebene desselben schneidet, und welche Haupthorizontallinie genannt wird, so heißen die Vertikalwinkel Höhen- (Elevations-) oder Tiefen- (Depressions-) Winkel. Daher ist Elevationswinkel derjenige Vertikalwinkel, welchen eine nach einem Punkte visierte Linie mit dem Horizont bildet, wenn dieser Punkt über dem Horizont liegt; und Depressionswinkel ist der Vertikalwinkel, den eine nach einem Punkt visierte Linie mit dem Horizont bildet, wenn dieser Punkt unter dem Horizont liegt.

Zur Berechnung von geraden Linien ist stets eine gerade Linie ursprünglich zu messen oder als bekannt vorauszusetzen, welche die Standlinie oder Basis der Messung genannt wird.

Hosted by Google

Zur Messung der Winkel bedient man sich des Theodoliten. Um zu sehen, ob ein Gegenstand genau horizontal steht, gebraucht man die Libelle oder Wasserwage.

Unter Höhe eines Punktes versteht man das Lot von diesem Punkt auf die Haupt-Horizontallinie des Standorts.

Sämtliche Aufgaben über Höhenmessungen lassen sich auf 6 Fälle zurückführen, und zwar in folgender Weise:

Die Höhe eines Punktes über der Horizontalebene des Standortes zu messen.

A. Wenn die zu wählende Standlinie in der Horizontalebene des Standortes liegt und
   a) mit der Haupt-Horizontallinie zusammenfällt, und in diesem Falle
      1. bis zum Fußpunkt der Vertikalen der zu bestimmenden Höhe zu messen ist;
      2. nicht bis zum Fußpunkt dieser Vertikalen zu messen ist;
   b) 3. mit der Haupt-Horizontallinie einen gegebenen Horizontalwinkel (Azimut) macht.

B. Wenn die zu wählende Standlinie unter einem gegebenen Winkel gegen die Horizontalebene des Standortes geneigt ist und
   a) in der Vertikalebene der betreffenden Höhe liegt und in diesem Falle
      4. bis zum Durchschnittspunkt mit der Vertikalen,
      5. nicht bis zum Durchschnittspunkt zu messen ist;
   b) 6. in einer nicht durch die betreffende Höhe gelegten Vertikalebene liegt.

1. **Fig. 1.** Gemessen sei die Standlinie $AQ = a$ und der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$; gesucht wird die Höhe $PQ = x$. Aufl. $x = a \operatorname{tg} \alpha$. Beisp. $a = 672$; $\alpha = 25^0\,18'\,27''$; $x = 317{,}7607$.

2. **Fig. 2** Gemessen sei die Standlinie $AB = a$ und die Elevationswinkel in A und B, nämlich $PAQ = \alpha$ und $PBQ = \beta$; gesucht wird die Höhe $PQ = x$. Aufl. $AQ - BQ = a$, oder $x \cot \alpha - x \cot \beta = a$, oder $x = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$. Beisp. $a = 450$; $\alpha = 18^0\,39'\,45''$; $\beta = 34^0\,26'\,32''$; $x = 299{,}4818$.

3. **Fig. 3.** Gemessen sei die Standlinie $AB = a$, und entweder der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, oder der Elevationswinkel $PBQ = \beta$, ferner die Horizontalwinkel $BAQ = \gamma$ und $ABQ = \delta$. Gesucht wird die Höhe $PQ = x$. Aufl. Entweder $AQ = x \cot \alpha$; $\dfrac{x \cot \alpha}{\sin \delta} = \dfrac{a}{\sin (\gamma + \delta)}$; $x = \dfrac{a \operatorname{tg} \alpha \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)}$. Oder $BQ = x \cot \beta$; $\dfrac{x \cot \beta}{\sin \gamma} = \dfrac{a}{\sin (\gamma + \delta)}$;

Hosted by Google

$x = \frac{a \operatorname{tg} \beta \sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)}$. Beisp. $a = 270$; $\alpha = 18^0 34' 24''$; $\gamma = 31^0 56' 40''$; $\delta = 109^0 42' 50''$; $x = 137{,}6766$.

4. **Fig. 4.** Gemessen sei die Standlinie $AB = a$ oder $AB' = a'$, der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$ und der Neigungswinkel der Standlinie gegen den Horizont, also im ersten Fall $\angle BAQ = \beta$ und im zweiten Fall $B'AQ = \beta'$; gesucht wird $PQ = x$. Aufl. 1. Fall. Die Standlinie liegt oberhalb des Horizonts. $x = AQ \operatorname{tg} \alpha = a \cos \beta \operatorname{tg} \alpha$; und $PB = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$. Beisp. $a = 400$; $\alpha = 53^0 18'$; $\beta = 10^0 48'$; $x = 527{,}1358$; $PB = 452{,}1832$. 2. Fall. Die Standlinie liegt unterhalb des Horizonts. $x = AQ \operatorname{tg} \alpha = a' \cos \beta' \operatorname{tg} \alpha$ und $PB' = \frac{a' \sin(\alpha + \beta')}{\cos \alpha}$. Beisp. $a' = 400$; $\alpha = 53^0 18'$; $\beta' = 10^0 48'$; $x = 527{,}1358$; $PB' = 602{,}0883$.

5. **Fig. 5.** Gemessen sei die Standlinie $AB = a$ oder im zweiten Fall $AB' = a'$; die Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, $P'AQ = \alpha'$ und $PBR = \beta$; oder im zweiten Fall statt α' der Depressionswinkel $QAP'' = \alpha''$. Gesucht $PQ = x$. Aufl. 1. Fall. Die Standlinie AB liegt oberhalb des Horizonts. $x = AP \sin \alpha = \frac{a \sin(\beta - \alpha') \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$; und $PP' = PQ - P'Q = AP \sin \alpha - AQ \operatorname{tg} \alpha' = AP (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha') = \frac{AP \sin(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha'} = \frac{a \sin(\beta - \alpha') \sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\beta - \alpha) \cos \alpha'}$. Beisp. $a = 100$; $\alpha = 54^0 17' 20''$; $\alpha' = 21^0 42' 50''$; $\beta = 83^0 39' 10''$; $x = 146{,}1229$; $PP' = 104{,}2917$. 2. Fall. Die Standlinie AB' liegt unterhalb des Horizonts. $x = AP \sin \alpha = \frac{a' \sin(\beta' + \alpha'') \sin \alpha}{\sin(\beta' - \alpha)}$; und $PP'' = \frac{a' \sin(\alpha + \alpha'') \sin(\beta' + \alpha'')}{\sin(\beta' - \alpha) \cos \alpha''}$. Beisp. $a' = 120$; $\alpha = 60^0 23' 50''$; $\alpha'' = 18^0 18' 20''$; $\beta' = 87^0 56' 40''$; $x = 216{,}5896$; $PP'' = 257{,}299$.

6. **Fig. 6.** Gemessen seien die Standlinie $AB = a$, ihr Neigungswinkel gegen den Horizont $BAB' = \alpha'$, der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, und die beiden Horizontalwinkel $QAB' = \beta$ und $AB'Q = \gamma$, von denen der letztere, wenn man $BA' \parallel AB'$ und $BQ' \parallel B'Q$ annimmt, auch in B gemessen werden kann $= A'BQ'$. Gesucht wird $PQ = x$. Aufl. $x = AQ \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB' \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{a \cos \alpha' \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}$. Beisp. $a = 98$; $\alpha = 70^0 46' 36''$; $\alpha' = 23^0 7' 12''$; $\beta = 39^0 40' 25''$; $\gamma = 75^0 11' 32''$; $x = 275{,}4255$.

Hosted by Google

Zum Verständnis der folgenden Aufgaben, welche im allgemeinen auf die oben behandelten 6 Fälle der Höhenaufgaben zurückkommen, sind noch einige in mehreren Aufgaben vorkommende Ausdrücke zu erklären.

1. Unter dem Sehwinkel oder der scheinbaren Größe eines Gegenstandes versteht man den Winkel, welchen die beiden vom Auge des Beobachters an die äußersten Grenzen des Gegenstandes gezogenen Linien (Visierlinien) miteinander bilden. Am häufigsten kommt in der Praxis der Fall vor, daß die eine Visierlinie auf dem Objekt senkrecht steht; geht dieser Fall jedoch aus einer Aufgabe nicht unzweideutig hervor, so ist immer ein von den Visierlinien gebildetes gleichschenkliges Dreieck der Rechnung zu Grunde zu legen. Ferner nimmt man an, daß für ein gewöhnliches Auge ein Gegenstand bei mäßiger Beleuchtung und reiner Luft unter einem Sehwinkel von 40″ noch sichtbar sei.

2. **Fig. 7.** Der um C beschriebene Kreis stelle einen größten Kreis der Erde vor; zieht man an denselben von dem über der Erdoberfläche befindlichen Punkt A die Tangente AB, so giebt der Berührungspunkt B den Ort an, bis zu welchem man von A aus, abgesehen von anderen Hindernissen als der Erdkrümmung, noch sehen kann. Die Weite des irdischen Horizonts für A wird durch den zum Winkel BCD gehörenden Bogen BD bestimmt. In allen Aufgaben ist der Erdradius 6370 Kilometer angenommen.

   Anmerk.: Der deutsche Geographentag hat 1882 in Halle beschlossen, die geographische Meile nicht mehr zu brauchen. Als die Größe des Erdkugelradius d. h. des Radius der Kugel, welche gleichen Inhalt mit dem Erdsphäroid hat ist r = 6370 km zu nehmen, welche Zahl in ihren beiden Zifferpaaren durch die Produkte 9 . 7 und 10 . 7 leicht im Gedächtnis zu behalten ist. Decimalstellen sind nicht anzuhängen, weil sie erst durch Beendigung der internationalen Gradmessung bekannt werden.

a) Aufgaben, welche auf die erste Höhenaufgabe zurückzuführen sind oder mit ihr in Zusammenhang stehen.

1. Aus der Höhe eines Turmes **AB** = a die direkte Entfernung der Turmspitze von einem Punkt C der Ebene unter der Voraussetzung zu berechnen, daß der Fuß des Turmes von C aus nicht zugänglich sei. Aufl. Man messe in C den Elevationswinkel der Spitze = α, so ist $x = \frac{a}{\sin \alpha}$. Beisp. $a = 200$; $\alpha = 28^0\ 37'\ 40''$; $x = 417{,}4341$.

2. Aus der Höhe eines Berges **AB** = a über einer horizontalen Thalebene die direkte Entfernung der Bergspitze B von einem in der Ebene

Hosted by Google

gegebenen Punkt C von der Bergspitze selbst aus zu ermitteln. Aufl. Man messe in B den Depressionswinkel von $C = \alpha$, so ist $x = \frac{a}{\sin \alpha}$. Beisp. $a = 2480$; $\alpha = 7^0\,24'$; $x = 19255{,}32$.

3. Aus der Höhe a eines Leuchtturmes soll von der Spitze aus die horizontale Entfernung eines Schiffes berechnet werden. Aufl. Man messe an der Spitze den Depressionswinkel des Schiffes $= \alpha$, so ist $x = a \cot \alpha$. Beisp. $a = 96{,}5$; $\alpha = 2^0\,56'50''$; $x = 1874{,}363$.

4. Wie hoch ist ein Gegenstand, wenn die Länge seines Schattens $= a$, während die Sonne α^0 über dem Horizont steht. Aufl. $x = a \operatorname{tg} \alpha$. Beisp. $a = 362$, $\alpha = 16^0$; $x = 103{,}8018$.

5. Die Schattenlänge einer Säule von der Höhe a ist $= b$; wie hoch steht die Sonne? Aufl. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$. Beisp. $a = 12$; $b = 15{,}6$; $\varphi = 37^0\,34'\,6''{,}93$.

6. Wie lang ist der Schatten eines Turmes von der Höhe a, wenn die Höhe der Sonne α^0 beträgt. Aufl. $x = a \cot \alpha$. Beisp. $a = 250$, $\alpha = 36^0\,27'$; $x = 338{,}473$.

7. Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Menschen a) der halben, b) der doppelten Länge desselben gleich ist. Aufl. a) $\operatorname{tg} \varphi = 2$; $\varphi = 63^0\,26'\,5''{,}81$. b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 26^0\,33'\,54''{,}18$.

8. Der Schatten einer vertikalen Stange ist um $\frac{1}{m}$ kürzer als die Stange; welche Höhe hat die Sonne? Aufl. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{m-1}$. Beisp. $m = 11$; $\varphi = 47^0\,43'\,34''{,}73$.

9. Die Höhen zweier Berge über einer Thalebene sind bekannt $= a$ und b; man soll von der Höhe des kleineren aus die direkte Entfernung x beider Bergspitzen, sowie die mittlere Entfernung y beider Berge bestimmen. Aufl. Man messe von der Spitze des kleineren Berges aus den Elevationswinkel α der Spitze des größeren, so ist $x = \frac{a-b}{\sin \alpha}$, $y = (a - b) \cot \alpha$. Beisp. $a = 983$; $b = 796$; $\alpha = 18^0 47' 20''$; $x = 580{,}5973$; $y = 549{,}6584$.

10. Die Höhe der oberen unzugänglichen Abteilung eines Turmes unter der Voraussetzung zu berechnen, daß eine horizontale Standlinie an den Fuß desselben geführt werden kann. Aufl. Man messe die Standlinie $= a$, und im Endpunkte derselben die Elevationswinkel für die Endpunkte der unzugänglichen Abteilung $= \alpha$ und β, so ist $x =$

Hosted by Google

$\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$. Beisp. $a = 187$; $\alpha = 28^0\,45'$; $\beta = 19^0\,57'$; $x = 34{,}71402$.

11. An einem hohen Schornstein von der Höhe a befindet sich in unzugänglicher Höhe ein Riß, welcher nicht bis zur Spitze reicht; die Länge x und Höhe y desselben über dem Boden soll ermittelt werden. Aufl. Von einem beliebigen Standpunkt messe man drei Elevationswinkel, nach der Spitze des Schornsteins $= \alpha$, nach dem Ende des Risses $= \beta$ und nach dem Anfang desselben $= \gamma$, so ist $x = \frac{a \cot\alpha \sin(\beta - \gamma)}{\cos\beta \cos\gamma}$ und $y = a \cot\alpha \operatorname{tg}\gamma$. Beisp. $a = 125$; $\alpha = 68^0\,29'\,48''$; $\beta = 53^0\,16'\,5''$; $\gamma = 48^0\,47'\,12''$; $x = 9{,}765155$ $y = 56{,}22823$.

12. Von der Spitze eines Turmes von der Höhe a soll die Höhe einer auf derselben Horizontalebene stehenden Säule ermittelt werden. Aufl. Man messe von der Spitze des Turmes die Depressionswinkel zu dem Fuß der Säule $= \alpha$ und zu der Spitze derselben $= \beta$, so ist $x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$. Beisp. $a = 67$; $\alpha = 57^0\,49'\,24''$; $\beta = 36^0\,31'\,10''$; $x = 35{,}7855$.

13. Der Abstand zweier übereinander befindlichen Fenster eines Hauses ist $= a$, und die aus ihnen zu einem Punkt des Erdbodens gemessenen Depressionswinkel sind $= \alpha$ und β. Wie weit ist jener Punkt vom Hause entfernt? Aufl. $x = \frac{a \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. Beisp. $a = 3$; $\alpha = 28^0\,54'$; $\beta = 26^0\,58'$; $x = 69{,}38533$.

14. In welcher Entfernung erscheint ein Mensch von der Größe a einem andern unter dem Sehwinkel von α^0? Aufl. $x = a \cot\alpha$. Beisp. $a = 1{,}726195$; $\alpha = 2^0$; $x = 49{,}43175$.

15. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Gegenstand von der Höhe a in der Entfernung b? Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$. Beisp. $a = 5$; $b = 216$; $\varphi = 1^0\,19'\,33'',79$.

16. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Gegenstand von der Höhe a in der Entfernung c, wenn sich das Auge in der Entfernung b über dem Erdboden befindet? Aufl. $\varphi = \lambda + \mu$; $\operatorname{tg}\lambda = \frac{a - b}{c}$, $\operatorname{tg}\mu = \frac{b}{c}$. Beisp. $a = 61$; $b = 1{,}726$; $c = 244$; $\varphi = 14^0\,3'\,34'',02$.

17. Auf welche Entfernung wird man das Schwarze einer Scheibe, dessen Durchmesser $= a$, noch sehen können? Aufl. Die Grenze des

Hosted by Google

Sehwinkels ist $= 40''$, mithin $x = \frac{1}{2}\, a \cot 20''$, oder wegen der Kleinheit des Winkels auch $x = a \cot 40''$. Beisp. $a = 0{,}2$; $x = 1031{,}324$.

18. In welcher Entfernung scheint eine Allee, deren Breite $= a$ ist, zusammenzulaufen? Aufl. Der Abstand der Bäume wird verschwindend klein, wenn der Sehwinkel $= 40''$; mithin $x = \frac{1}{2}\, a \cot 20''$. Beisp. $a = 8$; $x = 20626{,}48$.

19. Wie groß ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von der Länge a und der Weite b, oder der Winkel, welchen die vom Auge des Beobachters an die äußersten Grenzen des Bildes gezogenen Linien einschließen? Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{b}{2a}$. Beisp. $a = 68$; $b = 2{,}48$; $\varphi = 2^0\, 5'\, 21'',76$.

20. Welches ist der Sehwinkel einer Stange, deren Entfernung ihre Länge m mal übertrifft? Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2m}$. Beisp. $m = 1000$; $\varphi = 0^0\, 3'\, 26'',26$.

21. Wievielmal übertrifft die Entfernung eines Körpers seine wahre Größe, wenn der scheinbare Durchmesser $= \alpha^0$. Aufl. $x = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}\alpha$. Beisp. $\alpha = 0^0\, 1'\, 40''$; $x = 2062{,}648$.

22. Damit ein Gegenstand wahrnehmbar sei, muß seine Entfernung vom Auge mindestens 20,923 cm und seine scheinbare Größe wenigstens $40''$ betragen; wie groß muß also mindestens der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes sein? Aufl. $x = 41{,}846 \operatorname{tg} 20'' = 0{,}0040575$ cm.

23. Ein Luftballon mit dem Durchmesser a erscheint in einer Richtung, die mit dem Horizont einen Winkel α bildet, nur noch als Punkt. Die Entfernung x vom Beobachter und die Höhe y desselben über der Erde zu berechnen. Aufl. $x = \frac{1}{2}\, a \cot 20''$; $y = \frac{1}{2}\, a \cot 20'' \sin \alpha$; Beisp. $a = 15$, $\alpha = 21^0\, 48'$, $x = 77349{,}3$; $y = 28725{,}046$.

24. Ein Luftballon vom Durchmesser a erhebt sich von dem Orte A in senkrechter Richtung und erscheint nach einiger Zeit einem Beobachter in der Entfernung b von A unter einem Sehwinkel von α^0. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? Aufl. $x = \sqrt{\frac{1}{4}\, a^2 \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - b^2}$. Beisp. $a = 12$; $b = 78{,}5$; $\alpha = 6^0\, 39'\, 20''$; $x = 66{,}9746$.

25. Wie weit erstreckt sich in einer ebenen Gegend die Fernsicht von einem Gegenstand, dessen Höhe $= a$? Aufl. $\cos \varphi = \frac{r}{r + a}$. Beisp. $a = 65$ m, $\varphi = 0^0\, 15'\, 40''$, also der zugehörige Bogen $= 29{,}029364$ km.

Hosted by Google

26. Aus dem Erdradius r und der geographischen Breite α eines Ortes den Umfang seines Parallelkreises zu berechnen. Aufl. $x = 2\pi r \cos\alpha$. Beisp. $\alpha = 33^0\,33'$, $x = 33356{,}06$ km.

27. Wie hoch muß wenigstens ein Berg sein, um in einer Entfernung von a Kilometer noch gesehen werden zu können? Aufl. $x = \frac{2r \sin \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha}$ (r Erdradius und α der zum Bogen a gehörende Centriwinkel). Beisp. $a = 150$ km, $x = 1{,}7665$ km.

28. **Fig. 8.** Von einem Schiff sieht man, wenn das Auge b Meter über der Meeresfläche erhaben ist, den Gipfel eines Berges, wenn man noch a Kilometer von diesem entfernt ist. Wie hoch ist der Berg? Aufl. Der zum Bogen $a = AB$ gehörende Centriwinkel AMB sei $= \alpha$; $\cos\varphi = \frac{r}{r+b}$ und $x = \frac{2r \sin \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2}{\cos(\alpha-\varphi)}$. Beisp. $b = 10$ m; $a = 250$ km; $x = 4{,}470\,209$ km.

29. Wie hoch muß ein Punkt über der Meeresfläche liegen, von dem aus man den Gipfel eines Berges von der Höhe b Meter in einer Entfernung von a Kilometer sehen kann? Aufl. wie 28. Beisp. $b = 5{,}5$ km; $a = 370$ km; $x = 871{,}619$ m.

30. **Fig. 9.** Die Höhe der Atmosphäre aus der Dauer der Dämmerung zu berechnen. Aufl. Es sei M der Mittelpunkt der Erde, BCD der Äquator und der Kreis AE die Grenze der Erdatmosphäre. Befindet sich nun die Sonne in der Richtung BS, so daß BS der letzte direkte Strahl ist, welchen B von der Sonne erhält, so verschwindet die Dämmerung in D, indem A der letzte Punkt der Atmosphäre ist, welcher nach D hin diffuses Licht reflektieren kann. Da nun unter dem Äquator zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche die Dämmerung $1^h\,12'$ dauert, so wird bei der Rotation der Erde der Punkt B ebenfalls in $\frac{6}{5}$ Stunden von B nach D gelangen, so daß also $\angle DMB = 18^0$, oder $\angle DMA = AMB = 9^0$ ist. Nun ist $AM = \frac{r}{\cos 9^0}$, oder $AC = \frac{r}{\cos 9^0} - r = \frac{2r \sin 4^0\,30'^2}{\cos 9^0}$. Nimmt man $r = 6370$ km, so erhält man die gesuchte Höhe der Erdatmospäre $AC = 79{,}40285$ km.

Wollte man die Dauer der Dämmerung in irgend einem anderen Punkt der Erde außerhalb des Äquators der Rechnung zu Grunde legen, so hätte man zunächst mit Hülfe der geographischen Breite die Anzahl der Grade zu berechnen, welche beim Ende der Dämmerung die Sonne unter den Horizont herabgesunken ist.

b) Aufgaben, welche auf die zweite Höhenaufgabe zurückzuführen sind oder mit ihr in Zusammenhang stehen.

Hosted by Google

31. Zwei Punkte befinden sich mit dem Fuße eines Turmes von der Höhe a auf derselben Horizontalebene und in gerader Linie, und werden von der Spitze des Turmes unter den Depressionswinkeln α und β gesehen. Wie weit sind die Punkte voneinander entfernt? Aufl. $x = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$. Beisp. $a = 68{,}15$; $\alpha = 28^\circ 24'$; $\beta = 61^\circ 33'$; $x = 89{,}11533$.

32. Die von dem obersten und untersten Punkt eines leuchtenden Gegenstandes über die Spitze einer vertikalen Stange von der Länge a fallenden Strahlen bilden mit der Horizontalebene durch den Fußpunkt der Stange die Neigungswinkel α und β; wie lang ist der Halbschatten der Stange? Aufl. $x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$. Beisp. $a = 5$; $\alpha = 53^\circ 18'$; $\beta = 41^\circ 29'$; $x = 1{,}9279$.

33. Über die Spitze einer vertikalen Stange von der Höhe a fallen die oberen Randstrahlen der Sonne, deren Sehwinkel $= \alpha$, unter $\angle \beta$ ein; wie lang ist der Halbschatten der Stange? Aufl. $x = \frac{a \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta}$. Beisp. $a = 5{,}5$; $\alpha = 32'\ 1'',8$; $\beta = 36^\circ 47'$; $x = 0{,}08045106$.

34. Der Sehwinkel, unter dem ein Luftballon von der Höhe a erscheint, ist $= \alpha$ und der Elevationswinkel der Gondel $= \beta$. Zu berechnen ist die Höhe x der Gondel über der Erde und ihre Entfernung y vom Beobachter. Aufl. $x = \frac{a \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$, $y = \frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Beisp. $a = 20$; $\alpha = 1^\circ 48'$; $\beta = 48^\circ 30'$; $x = 304{,}6146$; $y = 406{,}7192$.

35. **Fig. 10.** Die Höhe $CD = x$ eines in eine Thalebene hervorspringenden Bergrückens und sein Durchmesser $EA = y$ zwischen zwei gegebenen Punkten E und A soll wegen Führung eines Tunnels durch denselben ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, daß die Bergspitze C zugänglich sei, mit EA in derselben Vertikalebene liege, und daß man von derselben die Punkte E und A sehen kann. Aufl. Man messe von C aus eine in der Verlängerung von EA liegende Standlinie $AB = a$; ferner in C die Depressionswinkel für A, B und E resp. $= \alpha$, β und γ, so ist $x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ und $y = \frac{a \sin \beta \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma \sin(\alpha - \beta)}$. Beisp. $a = 224$; $\alpha = 63^\circ 17' 25''$; $\beta = 21^\circ 43' 16''$; $y = 44^\circ 51' 53''$; $x = 111{,}6074$; $y = 168{,}292$.

Hosted by Google

36. **Fig. 11.** Unter ähnlichen Umständen wie in 35 soll der Durchmesser AB = y eines Berges in einer gewissen Richtung gemessen werden; jedoch mit dem Unterschied, daß man von der Spitze C des Berges nicht die beiden Punkte A und B sehen kann, sondern nur den einen A. Aufl. Man messe von A aus die Standlinie AE = a, und von B aus die Standlinie BF = b; ferner in C die Depressionswinkel nach A und E resp. = α und β. Dann wähle man einen mit AB in derselben Vertikalebene liegenden Punkt G so, daß von ihm aus sowohl C, wie B und F gesehen werden können, und messe in G den Elevationswinkel nach C = γ, und die Depressionswinkel nach B und F resp. = δ und ε. Von G ziehe man eine Parallele GL zu AB, und von C und G die Lote CD und GH auf AB, so ist $CD = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, $GH = \frac{b \sin\delta \sin\varepsilon}{\sin(\delta-\varepsilon)}$; und folglich $AD = \frac{a \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ (1) und $BH = \frac{b \cos\delta \sin\varepsilon}{\sin(\delta-\varepsilon)}$ (2); $CL = CD - GH$ und $LG = CL \cot\gamma$ (3). Aus (1), (2) und (3) findet man $y = AB = AD + LG + BH = \frac{a \sin\beta \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma \sin(\alpha-\beta)} - \frac{b \sin\varepsilon \sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma \sin(\delta-\varepsilon)}$.

37. **Fig. 12.** Zwei Punkte A und B, welche auf verschiedenen Seiten eines Berges in derselben Vertikal-, jedoch nicht in derselben Horizontalebene liegen, sollen durch einen Tunnel verbunden werden. Die Entfernung AB und das Steigungsverhältnis des Tunnels soll berechnet werden, wenn man von der Spitze C, welche mit A und B in derselben Vertikalebene liegt, beide Punkte sehen kann. Aufl. Man messe in A und B die horizontalen Standlinien AE = a und BF = b; ferner in C die Depressionswinkel für A, E, B und F resp. = α, β, γ, δ. Dann ist $CD = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ (1); $AD = \frac{a \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ (2); $CL = \frac{b \sin\gamma \sin\delta}{\sin(\gamma-\delta)}$ (3); $DG = BL = \frac{b \cos\gamma \sin\delta}{\sin(\gamma-\delta)}$ (4). Aus (1) und (3) ergiebt sich $BG = LD = CD - CL$ (5); und aus (2) und (4) $AG = AD + DG$ (6). Mithin $AB = \sqrt{BG^2 + AG^2}$ (7) und das Steigungsverhältnis $= \frac{BG}{AG}$ (8).

Beisp. a = 420; b = 612; $\alpha = 45^\circ\,28'\,30''$; $\beta = 33^\circ\,54'\,20''$; $\gamma = 39^\circ\,57'\,10''$; $\delta = 27^\circ\,19'\,40''$; CD = 832,854; AD = 819,158; CL = 825,4523; BL = 985,384; BG = 7,4017; AG = 1804,542; AB = 1804,557; Steigungsverhältnis $= \frac{1}{244}$.

Hosted by Google

c) Aufgaben, welche auf die dritte Höhenaufgabe zurückzuführen sind.

38. Die Höhe, in welcher ein Luftballon schwebt, durch trigonometrische Messung zu bestimmen. Aufl. **Fig. 3.** Man messe eine Standlinie $AB = a$; in jedem Endpunkt stelle sich ein Beobachter mit einem Theodoliten auf und verfolge mit dem Fernrohr den Ballon P. Auf ein verabredetes Zeichen messe der Beobachter in A den Höhenwinkel $PAQ = \alpha$; gleichzeitig müssen nun sofort beide Beobachter das Fernrohr herabschlagen und die Horizontalwinkel $QAB = \gamma$ und $QBA = \delta$ messen. Dann ist, wie in der dritten Höhenaufgabe, $PQ = x = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$. Beisp. $a = 483$; $\alpha = 15^0\,26'$; $\gamma = 31^0\,37'$; $\delta = 98^0\,14'$; $x = 171{,}8954$.

39. Die Höhe einer Wolke durch trigonometrische Messungen zu bestimmen. Aufl. wie 38.

d) Auf die fünfte Höhenaufgabe ist folgende Aufgabe zurückzuführen.

40. Die Höhe eines Turmes zu messen, welcher auf einem Abhange steht, wenn man vom Fußpunkt des Turmes den Abhang hinab eine Standlinie messen kann. Aufl. **Fig. 5.** Die Höhe des Turmes sei $PP' = x$, und die den Abhang herab gemessene Standlinie $AP' = a$, B die Mitte derselben. Man messe in A und B die Winkel $PAP' = \alpha$ und $PBP' = \beta$, so ist $PB = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)}$; vom $\triangle PBP'$ kennt man also zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also die übrigen Stücke berechnen. Beisp. $a = 14{,}3$; $\alpha = 36^0\,52'$; $\beta = 48^0\,48'$; $x = 16{,}91451$.

40a. B braucht nicht in der Mitte von AP' zu liegen, sondern kann bestimmt sein durch $AB = a$ und $BP' = b$. Die Auflösung ist ganz dieselbe. Beisp. $a = 20$; $b = 16$; $\alpha = 52^0\,27'$; $\beta = 76^0\,11'$; $x = 38{,}8205$.

41. Die Höhe eines Turmes von einem Bergabhang aus zu messen, welcher höher als der Fußpunkt, aber niedriger als die Spitze des Turmes liegt, und wenn vorausgesetzt wird, daß man den Berg hinab eine Standlinie so messen kann, daß ihre Verlängerung durch den Fußpunkt des Turmes geht. Aufl. **Fig. 5.** Es sei $PP'' = x$ der Turm, $AB' = a$ die den Bergabhang herab gemessene Standlinie. In A und B' messe man die Elevationswinkel der Turmspitze $PAQ = \alpha$ und $PB'R' = \beta$; ferner in einem beliebigen Punkt der Standlinie, z. B. in A, den Depressionswinkel des Fußpunktes P'' des Turmes, also $QAP'' = \gamma$. Im $\triangle PAB'$ ist dann $AP = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$, und im $\triangle PAP''$ ist $PP'' = \frac{AP \sin(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma}$

Hosted by Google

$= \frac{a \sin(\alpha+\gamma) \sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)\cos\gamma}$. Beisp. $a = 47$; $\alpha = 31^0\,46'\,50''$; $\beta = 58^0\,51'\,20''$; $\gamma = 1^0\,58'\,10''$; $x = 50{,}12035$.

e) Vermischte Höhenaufgaben.

42. **Fig. 13.** An einem Standpunkt A erscheint eine Wolke C, deren Höhe CD über der Erde = bm in nordöstlicher Richtung unter dem Elevationswinkel α. Unter welchem Elevationswinkel erscheint in demselben Augenblick die Wolke an einem Standpunkt B, der am nördlich vom ersten A liegt? Aufl. Es sei der gesuchte Elevationswinkel $CBD = \varphi$. Es ist $AD = b \cot\alpha$; dann kennt man vom Dreieck BAD zwei Seiten AB und AD und den eingeschlossenen Winkel $BAD = 45^0$, welchen die nördliche und nordöstliche Richtung bilden, kann also BD berechnen; mithin $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{BD}$. Beisp. $a = 10000$; $b = 5000$; $\alpha = 33^0\,49'\,40''$; $\varphi = 35^0\,13'\,24''{,}16$.

43. Unter ähnlichen Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe soll die Höhe CD der Wolke C ermittelt werden, wenn die Entfernung a der beiden Standorte A und B bekannt ist und in beiden gleichzeitig die Elevationswinkel der Wolke resp. $= \alpha$ und β beobachtet werden. Aufl. Es sei $CD = x$; so ist $BD = x \cot\beta$ und $AD = x \cot\alpha$; mithin im $\triangle ABD$: $x^2 \cot\beta^2 = a^2 + x^2 \cot\alpha^2 - 2ax \cot\alpha \cos 45^0$, oder $x^2 - \frac{a\sqrt{2}\cot\alpha \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}\,x + \frac{a^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)} = 0$.

44. **Fig. 14.** In zwei Punkten A und B, deren Entfernung = a, wird gleichzeitig das Steigen eines Luftballons beobachtet; zu einer bestimmten Zeit findet man in A den Elevationswinkel α und ONO-Richtung, in B den Elevationswinkel β und NO-Richtung. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? Aufl. Es sei die gesuchte Höhe $CD = x$; AE und BF mögen die östliche Richtung in den Punkten A und B vorstellen, so ist $\angle DAE = 22^0\,30'$ und $\angle DBF = 45^0$; mithin $\angle DAB + ABD = DAE + EAB + ABF - DBF = 22^0\,30' + 180^0 - 45^0 = 180^0 - 22^0\,30'$; also $\angle ADB = 22^0\,30'$; und da $AD = x \cot\alpha$ und $BD = x \cot\beta$, so sind im $\triangle ABD$ die Winkel DAB und ABD zu berechnen, da $\frac{\sin DBA}{\sin DAB} = \frac{AD}{BD} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}$ und $DBA + DAB = \frac{3}{4}\pi$, mithin $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\cot 11^0\,15'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(ABD - BAD)}$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(ABD - BAD) = \frac{\cot 11^0 15' \sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}$; dann AD oder BD und x.

Hosted by Google

45. Die Höhe eines Turmes DE zu berechnen, wenn man in der Horizontalebene des Fußpunktes E eine beliebige Standlinie AB, und von den Endpunkten A und B, sowie von irgend einem andern Punkt C derselben die Elevationswinkel der Turmspitze D messen kann. Aufl. Gemessen sei $AC = a$, $BC = b$, $\angle DAE = \alpha$, $\angle DCE = \gamma$, $\angle DBE = \beta$; gesucht $DE = x$. Es ist $\cos ECA = \frac{a^2 + x^2 \cot\gamma^2 - x^2 \cot\alpha^2}{2ax \cot\gamma}$ und $\cos ECB = -\cos ECA = \frac{b^2 + x^2 \cot\gamma^2 - x^2 \cot\beta^2}{2bx \cot\gamma}$; aus beiden ergiebt sich $x^2(a(\cot\beta^2 - \cot\gamma^2) + b(\cot\alpha^2 - \cot\gamma^2)) = ab(a+b)$, mithin $x = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{(b \sin\beta^2 \sin(\alpha+\gamma) \sin(\gamma-\alpha) + a \sin\alpha^2 \sin(\beta+\gamma) \sin(\gamma-\beta))}}$.

46. **Fig. 15.** Zwei durch ein Thal getrennte Anhöhen A und B sollen durch einen Eisenbahnviadukt verbunden werden. Man kennt die Höhe a des Punktes A und die Höhe b des Punktes B über einem Punkt E im Thale. Es soll die Länge $AB = x$ und das Steigungsverhältnis des Viadukts ermittelt werden. Aufl. Man denke sich auf die durch E gelegte Horizontalebene die Lote $AC = a$ und $BD = b$ gefällt, messe in E den Horizontalwinkel $CED = \gamma$ und die Höhenwinkel $AEC = \alpha$ und $BED = \beta$, so ist $CE = a \cot\alpha$ und $ED = b \cot\beta$; mithin kennt man vom $\triangle CED$ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also $CD = AF$ berechnen. Dann ist $x = \sqrt{AF^2 + (b-a)^2}$ und das Steigungsverhältnis $= \frac{b-a}{AF}$.

47. **Fig. 16.** Die Höhe eines Berges $CD = x$ zu berechnen, wenn man von dem Gipfel D desselben zwei Punkte A und H sehen kann, von denen der eine A in der Horizontalebene liegt; und wenn man ferner die Höhe $HB = b$ des Punktes H über der Horizontalebene und die Standlinie $AB = a$ messen kann. Aufl. Man messe in D die Depressionswinkel für A und H, $GDA = DAC = \delta$, $EDH = FHD = \varepsilon$ (wenn $FH \parallel DE$) und $\angle GDE = ACB = \gamma$. Bezeichnen wir noch $\angle BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$, so ist $x = AC \operatorname{tg}\delta$ und $x - b = BC \operatorname{tg}\varepsilon$; da nun $AC = \frac{a \sin\beta}{\sin\gamma}$ und $BC = FH = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma}$, so ist $x = \frac{a \sin\beta \operatorname{tg}\delta}{\sin\gamma}$ und $x - b = \frac{a \sin\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\gamma}$; mithin $\frac{b}{a} \sin\gamma = \sin\beta \operatorname{tg}\delta - \sin\alpha \operatorname{tg}\varepsilon$; wird nun $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\zeta$ und $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ gesetzt, so ist $\sin\gamma \operatorname{tg}\zeta =$

Hosted by Google

$\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\delta\left(\sin\alpha\,\frac{\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\delta-\mathrm{tg}\,\varepsilon}{\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\delta}+\cos\alpha\right)$; durch die Substitution $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\delta-\mathrm{tg}\,\varepsilon}{\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\delta}$ (1) erhalten wir $\cos(\alpha-\varphi)=\mathrm{tg}\,\zeta\cot\delta\cos\varphi$ (2). Aus (1) ist φ, aus (2) α und dann BC, $x-b$ und so x zu berechnen.

48. **Fig. 17.** Am Ufer eines Sees steht ein Turm, dessen Höhe = a bekannt ist; von der Spitze desselben erblickt man eine Wolke und gleichzeitig ihr Spiegelbild im See; die Höhe der Wolke über dem See, sowie ihre Entfernung vom Beobachtungsort ist zu berechnen. Aufl. Es sei AB = a der Turm, D die Wolke, also DE ihre Höhe, und in der Richtung AC sehe man von A ihr Spiegelbild. Dann messe man in A $\angle$ CAD = β und $\angle$ BAC = α; ist CF die Normale in C, so ist auch $\angle$ ACF = FCD = CDE = α. Gesucht wird DE = x und AD = y. Es ist $AC=\frac{a}{\cos\alpha}$; $DC=\frac{AC\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{a\sin\beta}{\cos\alpha\sin(2\alpha+\beta)}$; mithin $x=DC\cos\alpha=\frac{a\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$; und $y=\frac{CD\sin 2\alpha}{\sin\beta}=\frac{2a\sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}$; $BE=\frac{2a\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)}$.

49. **Fig. 18.** Dieselbe Aufgabe wie 48, nur unter der Bedingung, daß die Entfernung BE so groß ist, daß sie wegen der Kugelgestalt der Erde nicht mehr als gerade Linie, sondern als Kreisbogen angesehen werden muß. Aufl. Es sei M der Mittelpunkt der Erde; MB = MC = ME = r der Erdradius; AB = a die bekannte Höhe des Turmes; gemessen seien die Winkel DAC = β und CAB = γ; wir bezeichnen ACF = FCD = α und BME = φ. Dann ist im $\triangle$ ACM: $\frac{r+a}{r}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, also $\sin\alpha=\frac{(r+a)\sin\gamma}{r}$ (1); ferner $AC=\frac{r\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\gamma}$; mithin $y=\frac{AC\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{r\sin(\alpha-\gamma)\sin 2\alpha}{\sin\gamma\sin(2\alpha+\beta)}$; und $CD=\frac{AC\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{r\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta}{\sin\gamma\sin(2\alpha+\beta)}$. Man kennt also im $\triangle$ MCD zwei Seiten und den eingeschlossenenen Winkel, kann also r + x und dann auch φ als Summe zweier Winkel berechnen.

50. **Fig. 19.** Ein Schiff, dessen Mast CD ist, segelt mit einer bekannten gleichförmigen Geschwindigkeit von D nach D'. Von einem Punkte A aus, der sich in der Höhe AE = a über dem Horizont befindet, erblickt man in der Richtung AB das Spiegelbild der Mastspitze C und mißt den Winkel BAE = α. Ist nach einer bestimmten Zeit das Schiff in D' angelangt, so erblickt man das Spiegelbild der

Hosted by Google

Maſtſpitze C′ in der Richtung AB′ und mißt den Winkel B′AE = α′. Wie hoch iſt der Maſt des Schiffes CD = x, und wie weit iſt es in D und D′ von E entfernt, oder wie groß iſt DE = y und D′E = y′? Aufl. Es ſei die bekannte Strecke DD′ = b. Sind F und F′ die Spiegelbilder der Maſtſpitzen, ſo iſt CD = DF und ∠ BCF = CFB = α, ∠ B′C′F′ = C′F′B′ = α′. Im △ AFF′ iſt $AF = \frac{b \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$, mithin $x + a = AF \cos \alpha = \frac{b \cos\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; ferner $y = \frac{b \sin \alpha \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$ und $y' = \frac{b \sin 2\alpha'}{2 \sin(\alpha' - \alpha)}$.

51. Die ähnliche Aufgabe wie 50, nur daß die Höhe des Maſtes CD = c bekannt iſt, man in C und C′ die Spiegelbilder des Punktes A beobachtet und die Winkel BCD = α und B′C′D′ = α′ gemeſſen hat. Geſucht wird die Höhe AE = x des Punktes A über dem Horizont und die Entfernungen DE = y und D′E = y′. Aufl. Wie in 50 iſt $x = \frac{b \cos\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} - c$; $y = \frac{b \sin\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; $y' = \frac{b \sin 2\alpha'}{2 \sin(\alpha' - \alpha)}$.

52. Die ähnliche Aufgabe wie 51, nur daß von dem ſtillſtehenden Schiff, deſſen Maſt CD = c, die Höhe AE = x des Punktes A über dem Horizont berechnet werden ſoll, ſowie die Entfernung DE = y. Aufl. Man ſteige von der Maſtſpitze C eine Strecke CG = d herab, beobachte in C und G die Spiegelbilder des Punktes A und meſſe die Winkel DCB = α und DGB′ = α′. Dann iſt im △ AFG′ : $AF = \frac{d \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; ferner $x = \frac{d \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} - c$; $y = \frac{d \sin\alpha \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$.

§ 42.

Aufgaben über Diſtanzmeſſungen.

1. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes P vom Standort A zu beſtimmen. Aufl. Man meſſe in der durch A gehenden Horizontalebene eine Standlinie AB = a, und in A und B die Horizontalwinkel BAP = α und ABP = β, ſo iſt $AP = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

2. Die Entfernung zweier Punkte P und P′ zu ermitteln, zu denen man wohl gelangen, die man aber wegen zwiſchenliegender Hinderniſſe nicht unmitelbar meſſen kann. Aufl. Es ſei A ein Punkt, von dem aus man P und P′ ſowohl meſſen, wie ſehen kann; und man habe gefunden AP = a, AP′ = b und ∠ PAP′ = α, ſo daß man zwei Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel kennt.

Hosted by Google

3. Ein Punkt P soll seiner Lage nach bestimmt werden, wenn die Lage zweier anderen Punkte A und B bestimmt ist, und wenn man von P nach A und B wohl sehen, aber nicht messen kann; wenn man ferner von einem in der Verlängerung von AB über B liegenden Punkt C alle übrigen Punkte sehen kann (Seitwärts-Einschneiden). Aufl. Es sei $AB = a$, $\angle APB = \alpha$, $\angle BPC = \beta$ und $\angle PCB = \gamma$ gemessen. Dann ist $AP = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha}$, $BP = \frac{a \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha}$.
4. Die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte P und P′ voneinander und vom Standort der Messung zu bestimmen, wenn die Standlinie $AB = a$ so gewählt werden kann, daß ihr einer Endpunkt A in der Verlängerung von PP′ liegt. Aufl. Es seien $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\angle ABP' = \beta'$ die gemessenen Winkel. Dann ist $BP = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$; $x = \frac{BP \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha + \beta')} = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta')}$.
5. Die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte P und P′ voneinander und vom Standort A der Messung zu bestimmen, wenn eine Standlinie $AB = a$ so gewählt werden kann, daß man von A und B aus sowohl diese Punkte gegenseitig, als auch die Punkte P und P′ sehen kann, und daß ferner A und B auf derselben Seite von PP′ liegen (Vorwärts-Einschneiden). Aufl. In A seien die Winkel $PAB = \alpha$ und $P'AB = \alpha'$, und in B die Winkel $ABP = \beta$ und $ABP' = \beta'$ gemessen, so ist $AP = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; $AP' = \frac{a \sin \beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$. Man kennt nun vom $\triangle PAP'$ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also $PP' = x$ berechnen.
6. Dieselbe Aufgabe wie 5, nur ist man genötigt, die Standlinie $AB = a$ zwischen den beiden unzugänglichen Punkten P und P′ abzumessen. Aufl. wie 5.
7. Die Entfernungen dreier unzugänglichen Punkte A, B und C zu berechnen, wenn man auf der Verlängerung von AB über B den Punkt D und auf der von AC über C den Punkt E annehmen, DE messen und von D und E aus alle Punkte sehen kann. Aufl. Es sei $DE = a$; $\angle BDE = \alpha$, $\angle CDF = \beta$; $\angle BED = \gamma$; $\angle CED = \delta$. Dann ist $CD = \frac{a \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}$; $BE = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$; $AC = \frac{CD \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \delta \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta + \delta) \sin(\alpha + \delta)}$; $AB = \frac{BE \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \alpha \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \delta)}$. Im $\triangle ABC$ kennt man jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel $BAC = \pi - (\alpha + \delta)$, kann also BC berechnen.

Hosted by Google

8. **Fig. 20.** Die Höhen CE = y und DF = z zweier Berge, den horizontalen Abstand EF = x ihrer Spitzen C und D mit Hülfe einer Standlinie AB = a zu ermitteln, die zwar horizontal, aber nicht in eine Ebene mit beiden Berggipfeln gelegt werden kann. Aufl. CE und DF seien die von C und D gefällten Lote auf eine durch AB gelegte Horizontalebene. In A messe man den Höhenwinkel $CAE = \alpha$, und die Horizontalwinkel $EAF = \gamma$, $EAB = \delta$; und in B den Höhenwinkel $DBF = \beta$, und die Horizontalwinkel $FBE = \varepsilon$ und $FBA = \zeta$. Dann ist $AE = \frac{a \sin(\zeta - \varepsilon)}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$; $BF = \frac{a \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma + \zeta)}$; mithin $y = \frac{a \sin(\zeta - \varepsilon) \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$ und $z = \frac{a \sin(\delta - \gamma) \operatorname{tg} \beta}{\sin(\delta - \gamma + \zeta)}$. Ferner $BE = \frac{a \sin \delta}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$; wir kennen also vom $\triangle$ BFE zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ε, können also EF = x berechnen, Die direkte Entfernung CD ergiebt sich dann auch leicht.

9. Hansensche Aufgabe. **Fig. 21.** Die Entfernung zweier Punkte A und B, welche voneinander sichtbar sind, zu bestimmen, wenn dieselbe nicht direkt gemessen werden kann, wenn man aber von A und B aus zwei Punkte C und D, deren Entfernung CD = a bekannt, sehen, jedoch von A und B aus nicht nach C und D messen kann. Aufl. Es sei $\angle CAD = \alpha$, $CAB = \beta$, $ABD = \gamma$, $CBD = \delta$ gemessen, und $\angle ACD$ mit φ und BDC mit ψ bezeichnet. Dann ist $AD = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{x \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$, also $\sin \varphi = \frac{x \sin \alpha \sin \gamma}{a \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$; ferner $BC = \frac{a \sin \psi}{\sin \delta} = \frac{x \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$, also $\sin \psi = \frac{x \sin \beta \sin \delta}{a \sin(\beta + \gamma + \delta)}$; folglich $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin(\beta + \gamma + \delta)}{\sin \beta \sin \delta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$ und $\varphi + \psi = \beta + \gamma$ (§ 7, 1). Dann ist AD, und hierdurch AB zu berechnen.

10. Centrieren der Winkel. **Fig. 22.** Die Entfernungen zweier Orte A und B von einem dritten Ort C sind bekannt; man kann aber das Winkelinstrument nicht in C aufstellen, um den Zwischenwinkel $ACB = \varphi$ zu messen. Wie läßt sich dieser Winkel dennoch ermitteln? Aufl. Man wähle in der Nähe von C den Punkt D, dessen Entfernung von C = c bekannt ist, und von dem aus man nach A und B visieren kann, man messe also die Winkel $BDC = \alpha$ und $ADB = \beta$; ferner bezeichne man $\angle CAD$ mit λ und CBD mit μ, so ist $\sin \lambda = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{b}$; $\sin \mu = \frac{c \sin \alpha}{a}$; $\varphi = \beta + \lambda - \mu$.

Hosted by Google

11. Pothenotſche Aufgabe (§ 37, 212). **Fig. 23.** $\triangle$ ABC iſt durch a, b, γ gegeben; man kennt außerdem die Winkel α und β, welche die von P nach den Ecken des Dreiecks gezogenen Linien miteinander bilden, nämlich $\angle$ BPC $= \alpha$ und APC $= \beta$. Es ſoll daraus die Lage des Punktes P berechnet werden (Rückwärts-Einſchneiden). 1. Aufl. Bezeichnen wir $\angle$ CBP mit φ und CAP mit ψ, ſo iſt $\sin\psi = \frac{\mathrm{PC}\sin\beta}{\mathrm{b}}$; $\sin\varphi = \frac{\mathrm{PC}\sin\alpha}{\mathrm{a}}$; alſo $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{a}\sin\beta}{\mathrm{b}\sin\alpha}$; und $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (§ 7, 1). 2. Aufl. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$, alſo $\psi = \sigma - \varphi$, mithin $\sin\psi = \sin(\sigma - \varphi) = \sin\sigma\cos\varphi - \cos\sigma\sin\varphi$; alſo $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \sin\sigma\cot\varphi - \cos\sigma = \frac{\mathrm{a}\sin\beta}{\mathrm{b}\sin\alpha}$; mithin $\cot\varphi = \frac{\mathrm{a}\sin\beta}{\mathrm{b}\sin\alpha\sin\sigma} + \cot\sigma$. Aus beiden Auflöſungen folgt dann $\mathrm{PA} = \frac{\mathrm{b}\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}$; $\mathrm{PB} = \frac{\mathrm{a}\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}$; $\mathrm{PC} = \frac{\mathrm{a}\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{b}\sin\psi}{\sin\beta}$. 3. Aufl. **Fig. 24.** E und F ſeien die Mittelpunkte der um reſp. ACP und BCP beſchriebenen Kreiſe; ihre Radien ſeien $\mathrm{EC} = \mathrm{r}$ und $\mathrm{FC} = \mathrm{r}'$; ferner bezeichnen wir $\angle$ CFE mit λ und CEF mit λ'. Dann iſt $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{b}}{2\sin\beta}$; $\mathrm{r}' = \frac{\mathrm{a}}{2\sin\alpha}$; und wenn EH ſenkrecht AC gefällt wird, $\angle$ CEH $= \beta$, alſo $\angle$ ECH $= \frac{1}{2}\pi - \beta$ und FCB $= \frac{1}{2}\pi - \alpha$; mithin $\lambda + \lambda' = \pi - \gamma + \frac{1}{2}\pi - \beta + \frac{1}{2}\pi - \alpha = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Im $\triangle$ ECF iſt $\frac{\mathrm{r}+\mathrm{r}'}{\mathrm{r}-\mathrm{r}'} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')}$; wird $\frac{\mathrm{r}'}{\mathrm{r}} = \cos\mu$ geſetzt, ſo iſt $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\lambda-\lambda') = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\mu^2$; man kann alſo λ und λ' berechnen. Nun iſt $\mathrm{CP} = 2\mathrm{r}\sin\lambda' = \frac{\mathrm{b}\sin\lambda'}{\sin\beta}$; $\mathrm{AP} = \frac{\mathrm{b}\sin(\beta+\lambda')}{\sin\beta}$; $\mathrm{BP} = -\frac{\mathrm{a}\sin(\gamma+\beta+\lambda')}{\sin\alpha}$. Zur Beſtimmung der Richtung von CP dienen die Winkel ACP oder BCP, die man auf folgende Weiſe beſtimmen kann: Die Centrale EF ſteht ſenkrecht auf der gemeinſchaftlichen Sehne CP, alſo $\angle$ ECP $= \lambda' - \frac{1}{2}\pi$; $\angle$ ACP $=$ ECH $-$ ECP $= \frac{1}{2}\pi - \beta - \lambda' + \frac{1}{2}\pi = \pi - (\beta + \lambda')$; und $\angle$ BCP $= \gamma -$ ACP $= \gamma + \beta + \lambda' - \pi$.

Beſondere Fälle. a) Beſondere Lage von P. 1. Liegt P auf der Peripherie des um $\triangle$ ABC beſchriebenen Kreiſes, ſo iſt die Aufgabe unbeſtimmt. 2. Liegt P innerhalb von $\triangle$ ABC, ſo

Hosted by Google

sind die Formeln dieselben. 3. P liegt auf AB; da $\alpha + \beta = \pi$, so braucht nur einer von beiden Winkeln gegeben zu sein; dann ist $\varphi + \psi = \pi - \gamma$ und $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}$ (§ 7,1); $AP = \frac{b \sin(\alpha - \psi)}{\sin\beta}$; $BP = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha}$; $CP = \frac{b \sin\psi}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\varphi}{\sin\alpha}$. b) Besondere Lage von C. 4. C liegt von AB aus nach P zu. In den obigen Formeln ist $2\pi - \gamma$ für γ zu setzen, so daß $\varphi + \psi = \gamma - (\alpha + \beta)$ ist. 5. C liegt auf der geraden Linie zwischen A und B; dann ist $\gamma = \pi$, mithin $\varphi + \psi = \pi - (\alpha + \beta)$. 6. CP trifft nicht AB selber, sondern ihre Verlängerung über B, dann ist $-\alpha$ für α und $2\pi - \varphi$ für φ zu setzen, so daß $2\pi - \varphi + \psi = 2\pi - (\beta + \gamma - \alpha)$ oder $\varphi - \psi = \beta + \gamma - \alpha$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ ist, also § 7, 2.

12. Man kennt $\triangle$ ABC durch a, b, γ und kann außerdem Punkt P, der wie in Fig. 23 liegt, von A und B visieren; die Lage des Punktes P ist zu bestimmen. 1. Aufl. Es sei gemessen $\angle CAP = \alpha$ und $\angle CBP = \beta$; zunächst wird es darauf ankommen, $\angle APC = \varphi$ und $\angle CPB = \psi$ zu berechnen, da sich alsdann AP, BP und CP ohne weiteres berechnen lassen. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ (§ 7, 1). 2. Aufl. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$; $\psi = \sigma - \varphi$; $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \sin\sigma \cot\varphi - \cos\sigma$; also $\cot\varphi = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\sigma} + \cot\sigma$. 3. Aufl. Nach Berechnung von $\triangle$ ABC kennt man AB, $\angle BAP$ und $\angle ABP$, kann also $\triangle$ ABP, und dann die Dreiecke CAP und CBP berechnen.

13. **Fig. 25.** In einer Ebene liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E. Man kennt die Strecken $AB = a$ und $BC = b$; ferner hat man die Winkel $AEB = \alpha$, $BEC = \beta$, $ADB = \alpha'$, $BDC = \beta'$ und $EBD = \gamma$ gemessen. Wie groß ist die Strecke $ED = z$? Aufl. Man setze $BE = x$, $BD = y$, $\angle BAE = \varphi$ und $\angle BCD = \psi$, so erhält man zur Bestimmung dieser vier Unbekannten folgende vier Gleichungen: $\frac{x}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin(\psi + \beta' - \beta - \gamma)}$, $\frac{y}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta'}$, $\frac{a}{y} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\varphi + \alpha - \alpha' - \gamma)}$; setzt man $\beta' - \beta - \gamma = \delta$ und $\alpha - \alpha' - \gamma = \varepsilon$ und multipliziert je zwei dieser Gleichungen, so erhält man: $\frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi \sin\beta}{\sin\alpha \sin(\psi + \delta)}$

Hosted by Google

und $\frac{a}{b} = \frac{\sin\psi \sin\alpha'}{\sin\beta' \sin(\varphi+\varepsilon)}$, oder $\sin(\psi+\delta) = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} \sin\varphi$ und $\sin\psi = \frac{a \sin\beta'}{b \sin\alpha'} \sin(\varphi+\varepsilon)$. Setzen wir hierin $\psi + \frac{1}{2}\delta = \lambda$, $\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon = \mu$, $\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} = p$ und $\frac{a \sin\beta'}{b \sin\alpha'} = q$, so ergiebt sich $\sin(\lambda + \frac{1}{2}\delta) = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon)$ und $\sin(\lambda - \frac{1}{2}\delta) = q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$. Die Summe und Differenz dieser Gleichungen giebt: $2 \sin\lambda \cos\frac{1}{2}\delta = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) + q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$ und $2 \cos\lambda \sin\frac{1}{2}\delta = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) - q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$. Multipliziert man ferner beide Gleichungen durch resp. $\sin\frac{1}{2}\delta$ und $\cos\frac{1}{2}\delta$, quadriert und addiert sie, so erhält man: $\sin\delta^2 = p^2 \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon)^2 + q^2 \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)^2 - 2pq \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon) \cos\delta$, also $2 \sin\delta^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos\delta \cos\varepsilon + 2pq \cos\delta \cos 2\mu - p^2 \cos(2\mu - \varepsilon) - q^2 \cos(2\mu + \varepsilon)$, und hieraus $\frac{(p^2+q^2)\cos\varepsilon - 2pq\cos\delta}{(p^2-q^2)\sin\varepsilon} \cos 2\mu + \sin 2\mu = \frac{p^2+q^2-2pq\cos\delta\cos\varepsilon - 2\sin\delta^2}{(p^2-q^2)\sin\varepsilon}$, woraus 2μ nach § 3, 1 zu berechnen, dann φ, ψ u. s. w.

14. Die vier Punkte C, A, B, D liegen in dieser Reihenfolge auf einer geraden Linie, und zwar soll $AC = BD$ sein. Von irgend einem Punkte E aus hat man die Winkel $CEA = \alpha$, $AEB = \beta$ und $BED = \gamma$ gemessen; außerdem kennt man $AB = a$. Wie groß ist alsdann $AC = BD = x$? Aufl. Bezeichnen wir $\angle ACE$ mit φ und $\angle BDE$ mit ψ, so erhalten wir $\frac{x}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$, $\frac{x}{BE} = \frac{\sin\gamma}{\sin\psi}$, $\frac{BE}{a+x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{AE}{a+x} = \frac{\sin\psi}{\sin(\beta+\gamma)}$; diese 4 Gleichungen miteinander multipliziert, giebt $\frac{x^2}{(a+x)^2} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$ oder $x\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}} - 1\right) = a$.

15. Dieselbe Aufgabe wie 14, nur soll $CA = BD = a$ bekannt sein und $AB = x$ gesucht werden. Aufl. Ähnlich wie in 14 findet man $x = a\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}} - 1\right)$.

16. Die vier Punkte C, A, B, D liegen in dieser Reihenfolge auf einer geraden Linie; man kennt $CA = a$ und $BD = b$ und kann von irgend einem Punkte E aus die Winkel $CEA = \alpha$, $AEB = \beta$ und $BED = \gamma$ messen. Wie groß ist $AB = x$ Aufl. Ähnlich

Hosted by Google

wie in 14 kann man vier Gleichungen aufstellen und erhält durch Multiplikation derselben: $\frac{ab}{(a+x)\ (b+x)} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$ oder $x^2 + (a+b)\,x + ab\left(1 - \frac{\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\ \sin\gamma}\right) = 0$; da nun $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ ist, so nimmt obige Gleichung die Form an: $x^2 + (a+b)\,x - \frac{ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} = 0$.

17. **Fig. 26.** A, B, C seien drei Orte, welche sämtlich in verschiedenen Horizontalebenen liegen; von B sei in der Richtung BA eine Standlinie BD = a abgemessen; außerdem seien gemessen die Winkel $BDC = \alpha$, $CBD = \beta$, $ACB = \gamma$; ferner in C die Depression von A, nämlich $FCA = \delta$, und die Elevation von B, nämlich $BCF = \varepsilon$. Zu ermitteln sind die Entfernungen der drei Orte und die Höhen von B und C über dem Horizont von A, also CE und BG. Aufl. Es ist $BC = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $AC = \frac{BC\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $AB = \frac{BC\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $CE = AC\sin\delta = \frac{a\sin\alpha\sin\beta\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $BF = BC\sin\varepsilon = \frac{a\sin\alpha\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}$; $BG = CE + BF$.

18. **Fig. 27.** Auf der geraden Linie AD bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit g ein Körper nach D, und ein zweiter auf der Geraden A′D mit der konstanten Geschwindigkeit g′ nach demselben Punkt D hin. Als sich die Körper in A und A′ befanden, wurde $\angle AA'D = \alpha$ gemessen; nach t Sekunden, als sie sich in B und B′ befanden, $\angle DB'B = \beta$; und bei einer dritten Beobachtung nach t′ Sekunden, als sie sich in C und C′ befanden, $\angle CC'D = \gamma$. Wie groß ist die Entfernung der Punkte C und C′ vom Punkt D, und wie groß $\angle ADA'$? Aufl. Es sei $CD = x$, $C'D = y$, $\angle ADA' = \varphi$. Dann ist $BB' = EB' - EB = FB' - FB$; da nun $EB' = \frac{g'\,t\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$; $EB = \frac{g\,t\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\alpha)}$; $FB' = \frac{g'\,t'\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}$; $FB = \frac{g\,t'\sin(\gamma+\varphi)}{\sin(\gamma-\beta)}$, so erhält man die Gleichung: $\left(\frac{t\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t'\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}\right)\cos\varphi + \left(\frac{t\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t'\cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}\right)\sin\varphi$

Hosted by Google

$= \frac{g't \sin\alpha}{g \sin(\beta-\alpha)} - \frac{g't' \sin\gamma}{g \sin(\gamma-\beta)}$. Setzt man nun die bekannten Ausdrücke $\frac{t \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t' \sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)} = r \cos\psi$ und $\frac{t \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t' \cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)} = r \sin\psi$, so erhält man durch Division $\operatorname{tg}\psi$, und dann aus der obigen Gleichung $\cos(\psi-\varphi) = \frac{g'}{g}\cos\psi$, woraus φ zu berechnen. Ferner $CC' = FC' - FC = \frac{g't' \sin\beta - gt' \sin(\beta+\varphi)}{\sin(\gamma-\beta)}$, und folglich $x = \frac{t' \sin\gamma (g' \sin\beta - g \sin(\beta+\varphi))}{\sin\varphi \sin(\gamma-\beta)}$ und $y = \frac{x \sin(\gamma+\varphi)}{\sin\gamma} = \frac{t' \sin(\gamma+\varphi)\,(g' \sin\beta - g \sin(\beta+\varphi))}{\sin\varphi \sin(\gamma-\beta)}$.

Besonderer Fall. Bewegt sich nur Punkt A, während der Beobachtungspunkt A' in Ruhe bleibt, so kann man ebenfalls die drei Winkel α, β, γ messen; setzt man daher in den obigen Formeln $g' = 0$, so erhält man $\varphi = \psi - \frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{t'g \sin\gamma \cos(\beta+\psi)}{\cos\psi \sin(\beta-\gamma)}$; und $y = \frac{t'g \cos(\psi+\gamma)\cos(\beta+\psi)}{\cos\psi \sin(\gamma-\beta)}$.

§. 43.

Parallaxen-Aufgaben.

Die Gesichtslinien, welche von zwei verschiedenen Örtern des Auges oder auch von zwei gleichzeitigen Beobachtern nach ein und demselben Gegenstand gezogen werden, bilden an diesem einen Winkel, welcher die Parallaxe des Objekts genannt wird. Höhenparallaxe eines Sterns heißt der Winkel, welchen die von einem Ort und dem Mittelpunkt der Erde nach dem Stern gezogenen Linien bilden; dieser Winkel wird seinen größten Werth erreichen, wenn der Stern im Horizont des Beobachtungsortes steht, dann nennt man ihn die Horizontalparallaxe des Sterns; sie ist dann der Winkel, unter welchem der Erdradius von dem Stern aus erscheint.

1. Die Entfernung eines Himmelskörpers von der Erde zu berechnen, wenn die Zenithdistanzen desselben im Augenblick der Kulmination an zwei unter demselben Meridian liegenden Orten von bekanntem Breitenunterschied beobachtet sind. Aufl. **Fig. 28.** A und B seien die beiden unter demselben Meridian liegenden Beobachtungsorte, deren Breitenunterschied $ACB = \gamma$ ist. In A sei die Zenithdistanz des

Hosted by Google

Sternes S zur Zeit der Kulimination gemessen, nämlich $ZAS = z$, und zu derselben Zeit in B die Kulmination desselben Sternes $Z'BS = z'$; mithin kennen wir auch $\angle CAS = \pi - z = \alpha$ und $\angle CBS = \pi - z' = \beta$; ferner $AC = BC = r$. Daher ist die Auflösung dieser Aufgabe ganz dieselbe, wie die von § 42, 12. Es ist nämlich $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§ 7, 1); wodurch die Höhenparallaxen des Sternes S in Bezug auf die Orte A und B gefunden sind. Ferner ist $AS = \frac{r\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}$; $BS = \frac{r\sin(\beta+\psi)}{\sin\psi}$; $CS = \frac{r\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{r\sin\beta}{\sin\psi}$. Beisp. Der Breitenunterschied vom Kap und Stockholm beträgt $93^0\,15'\,27''$; die Zenithdistanz des im Meridian stehenden Mondes beträgt am Kap $33^0 20' 24''$ nördlich, und in demselben Augenblick in Stockholm $61^0\,13'\,33''$ südlich. Die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkt der Erde in Erdhalbmessern zu berechnen. $\varphi = 0^0\,48'\,14'',9$; $\psi = 0^0\,30'\,15'',1$; $CS = 62{,}456$ Erdhalbmesser.

2. Am Kap und in Stockholm, deren Breitenunterschied $= 93^0\,15'\,26'',7$, wurden die Zenithdistanzen des Mars im Augenblick seiner Kulmination gemessen, nämlich in Stockholm $z = 68^0\,14'$ südlich, und am Kap $z' = 25^0\,2'$. $CS = 8373{,}53$ Erdradien.

Besonderer Fall. **Fig. 29.** Liegen A und B auf derselben Seite von CS, so ist $\varphi - \psi = \beta - \alpha - \gamma$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§ 7, 2); $CS = \frac{r\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{r\sin\beta}{\sin\psi}$. Beisp. In Göttingen ist die Zenithdistanz des kulminierenden Mondes $z = 43^0 20' 25''$ und in Altona zu derselben Zeit $z' = 41^0\,17'\,58''$, während der Breitenunterschied von Göttingen und Altona, welche auf demselben Meridian liegen, $2^0\,0'\,57'',4$ beträgt. Wie groß ist die Entfernung des Mondes von der Erde? 60,629 Erdradien.

3. Berechnung der Horizontalparallaxe aus der Höhenparallaxe eines Sterns. Aufl. **Fig. 30.** $\varphi = ASC$ sei die in A gemessene Höhenparallaxe des Sterns, während die Zenithdistanz desselben $SAZ = z$ ist. Legt man in der Ebene desselben Meridians in A eine Tangente AS' an die Erde, so daß $CS' = CS$, dann ist $AS'C = \lambda$ die Horizontalparallaxe. Nun ist $\frac{AC}{CS} = \frac{\sin\varphi}{\sin z}$, und $\frac{AC}{CS'} = \sin\lambda$, mithin $\sin\lambda = \frac{\sin\varphi}{\sin z}$.

Hosted by Google

1. Tabelle pythagoreiſcher Dreiecke.

№	a	b	c	h	p	q	α	β
1	4	3	5	2,4	3,2	1,8	53° 7′ 48″,36	36° 52′ 11″,64
2	12	5	13	4,615384	11,076923	1,923076	67° 22′ 48″,48	22° 37′ 11″,52
3	15	8	17	7,058823	13,235294	3,764705	61° 55′ 39″,05	28° 4′ 20″,95
4	24	7	25	6,72	23,04	1,96	73° 44′ 23″,27	16° 15′ 36″,73
5	21	20	29	14,482758	15,206896	13,793103	46° 23′ 49″,86	43° 36′ 10″,14
6	40	9	41	8,780487	39,024390	1,975609	77° 19′ 10″,62	12° 40′ 49″,38
7	35	12	37	11,351351	33,108108	3,891891	71° 4′ 31″,28	18° 55′ 28″,72
8	60	11	61	10,819672	59,016393	1,983606	79° 36′ 40″,12	10° 23′ 19″,88
9	45	28	53	23,773584	38,207547	14,792452	58° 6′ 33″,16	31° 53′ 26″,84
10	56	33	65	28,430769	48,246153	16,753846	59° 29′ 23″,15	30° 30′ 36″,85
11	84	13	85	12,847058	83,011764	1,988235	81° 12′ 9″,32	8° 47′ 50″,68
12	63	16	65	15,507692	61,061538	3,938461	75° 44′ 59″,87	14° 15′ 0″,13
13	55	48	73	36,164383	41,438356	31,561643	48° 53′ 16″,49	41° 6′ 43″,51
14	80	39	89	35,056179	71,910112	17,089887	64° 0′ 38″,76	25° 59′ 21″,24
15	112	15	113	14,867256	111,008858	1,991141	82° 22′ 18″,66	7° 37′ 41″,34
16	77	36	85	32,611764	69,752941	15,247058	64° 56′ 32″,59	25° 3′ 27″,41
17	72	65	97	48,247422	53,443298	43,556701	47° 55′ 29″,91	42° 4′ 30″,09
18	144	17	145	16,882758	143,006896	1,993103	83° 16′ 1″,49	6° 43′ 58″,51
19	99	20	101	19,603960	97,039603	3,960396	78° 34′ 43″,73	11° 25′ 16″,27
20	91	60	109	50,091743	75,972477	33,027522	56° 36′ 5″,44	33° 23′ 54″,56
21	140	51	149	47,919463	131,543624	17,456375	69° 59′ 2″,53	20° 0′ 57″,47
22	180	19	181	18,895027	179,005524	1,994475	83° 58′ 27″,93	6° 1′ 32″,07
23	117	44	125	41,184	109,512	15,488	69° 23′ 25″,10	20° 36′ 34″,90
24	105	88	137	67,445255	80,474452	56,525547	50° 2′ 1″,64	39° 57′ 58″,36
25	132	85	157	71,464968	110,980891	46,019108	57° 13′ 15″,31	32° 16′ 44″,69
26	176	57	185	54,227027	167,437837	17,562162	72° 3′ 17″,09	17° 56′ 42″,91
27	220	21	221	20,904977	219,004524	1,995475	84° 32′ 50″,56	5° 27′ 9″,44
28	143	24	145	23,668965	141,027586	3,972413	80° 28′ 21″,78	9° 31′ 38″,22
29	120	119	169	84,497041	85,207100	83,792899	45° 14′ 23″,02	44° 45′ 36″,98
30	168	95	193	82,694300	146,238341	46,761658	60° 30′ 46″,35	29° 29′ 13″,65
31	264	23	265	22,913207	263,003773	1,996226	85° 1′ 15″,22	4° 58′ 44″,78
32	165	52	173	49,595375	157,369942	15,630057	72° 30′ 27″,63	17° 29′ 32″,37
33	153	104	185	86,010810	126,535135	58,464864	55° 47′ 40″,35	34° 12′ 19″,65
34	156	133	205	101,209756	118,712195	86,287804	49° 33′ 1″,03	40° 26′ 58″,97
35	208	105	233	93,733905	185,682403	47,317596	63° 12′ 54″,01	26° 47′ 5″,99
36	260	69	269	66,691449	251,301115	17,698884	75° 8′ 13″,85	14° 51′ 46″,15
37	312	25	313	24,920127	311,003194	1,996805	85° 25′ 7″,61	4° 34′ 52″,39
38	195	28	197	27,715736	193,020304	3,979695	81° 49′ 43″,56	8° 10′ 16″,44
39	187	84	205	76,624390	170,580487	34,419512	65° 48′ 37″,74	24° 11′ 22″,26
40	171	140	221	108,325791	132,312217	88,687782	50° 41′ 32″,47	39° 18′ 27″,53
41	252	115	277	104,620938	229,256317	47,743682	65° 28′ 13″,63	24° 31′ 46″,37
42	308	75	317	72,870662	299,255520	17,744479	76° 18′ 52″,03	13° 41′ 7″,97
43	364	27	365	26,926027	363,002739	1,997260	85° 45′ 28″,10	4° 14′ 31″,90
44	221	60	229	57,903930	213,279475	15,720524	74° 48′ 38″,57	15° 11′ 21″,43
45	209	120	241	104,066390	181,248962	59,751037	60° 8′ 13″,81	29° 51′ 46″,19

Hosted by Google

№	a	b	c	h	p	q	α	β
46	240	161	289	133,702422	199,307958	89,692041	56° 8′ 41″,89	33° 51′ 19″,11
47	420	29	421	28,931116	419,002375	1,997624	86° 3′ 0″,48	3° 56′ 59″,52
48	255	32	257	31,750972	253,015564	3,984435	82° 50′ 50″,39	7° 9′ 9″,61
49	247	96	265	89,479245	230,222641	34,777358	68° 45′ 38″,49	21° 14′ 21″,51
50	231	160	281	131,530249	189,896797	91,103202	55° 17′ 31″,02	34° 42′ 28″,98
51	224	207	305	152,026229	164,511475	140,488524	47° 15′ 31″,52	42° 44′ 28″,48
52	288	175	337	149,554896	246,124629	90,875370	58° 42′ 55″,84	31° 17′ 4″,16
53	352	135	377	126,047745	328,657824	48,342175	69° 1′ 1″,37	20° 58′ 58″,63
54	416	87	425	85,157647	407,190588	17,809411	78° 11′ 15″,78	11° 48′ 44″,22
55	480	31	481	30,935550	479,002079	1,997920	86° 18′ 17″,20	3° 41′ 42″,80
56	285	68	293	66,143344	277,218430	15,781569	76° 34′ 49″,19	13° 25′ 10″,81
57	273	136	305	121,731147	244,357377	60,642622	63° 31′ 8″,25	26° 28′ 51″,75
58	253	204	325	158,806153	196,950769	128,049230	51° 7′ 11″,74	38° 52′ 48″,26
59	272	225	353	173,371104	209,586402	143,413597	50° 24′ 8″,09	39° 35′ 51″,91
60	340	189	389	165,192802	297,172236	91,827763	60° 55′ 51″,92	29° 4′ 8″,08
61	408	145	433	136,628175	384,443418	48,556581	70° 26′ 6″,67	19° 33′ 53″,33
62	476	93	485	91,274226	467,167010	17,832989	78° 56′ 41″,72	11° 3′ 18″,28
63	544	33	545	32,939449	543,001834	1,998165	86° 31′ 42″,93	3° 28′ 17″,07
64	323	36	325	35,778461	321,012307	3,987692	83° 38′ 25″,23	6° 21′ 34″,77
65	299	180	349	154,212034	256,163323	92,836676	58° 57′ 6″,41	31° 2′ 53″,59
66	275	252	373	185,790884	202,747989	170,252010	47° 29′ 56″,37	42° 30′ 3″,63
67	396	203	445	180,647191	352,395505	92,604494	62° 51′ 32″,89	27° 8′ 27″,11
68	468	155	493	147,139959	444,267748	48,732251	71° 40′ 31″,11	18° 19′ 28″,89
69	612	35	613	34,942903	611,001631	1,998368	86° 43′ 36″,64	3° 16′ 23″,36
70	357	76	365	74,334246	349,175342	15,824657	77° 58′ 55″,15	12° 1′ 4″,85
71	345	152	377	139,098143	315,716180	61,283819	66° 13′ 21″,66	23° 46′ 38″,34
72	325	228	397	186,649874	266,057934	130,942065	54° 56′ 55″,93	35° 3′ 4″,07
73	304	297	425	212,442352	217,449411	207,550588	45° 40′ 2″,33	44° 19′ 57″,67
74	380	261	461	215,140997	313,232104	147,767895	55° 31′ 1″,48	34° 28′ 58″,52
75	456	217	505	195,944554	411,754455	93,245544	64° 33′ 4″,64	25° 26′ 55″,36
76	532	165	557	197,594254	508,122082	48,877917	72° 46′ 7″,34	17° 13′ 52″,66
77	608	105	617	103,468395	599,131280	17,868719	80° 12′ 6″,54	9° 47′ 53″,46
78	684	37	685	36,945985	683,001459	1,998540	86° 54′ 13″,26	3° 5′ 46″,74
79	399	40	401	39,800498	397,009975	3,990024	84° 16′ 30″,68	5° 43′ 29″,32
80	391	120	409	114,718826	373,718826	35,207823	72° 56′ 18″,49	17° 3′ 41″,51
81	351	280	449	218,886414	274,389755	174,610244	51° 25′ 11″,67	38° 34′ 48″,33
82	360	319	481	238,752598	269,438669	211,561330	48° 27′ 19″,76	41° 32′ 40″,24
83	440	279	521	235,623800	371,593090	149,406909	57° 37′ 17″,72	32° 22′ 42″,28
84	520	231	569	211,107205	475,219683	93,780316	66° 2′ 51″,83	23° 57′ 8″,17
85	680	111	689	109,550072	671,117561	17,882438	80° 43′ 44″,66	9° 16′ 15″,34
86	760	39	761	38,948751	759,001314	1,998685	87° 3′ 44″,63	2° 56′ 15″,37
87	437	84	445	82,489887	429,143820	15,856179	79° 7′ 9″,60	10° 52′ 50″,40
88	425	168	457	156,236323	395,240700	61,759299	68° 25′ 53″,05	21° 34′ 6″,95
89	377	336	505	250,835643	281,443564	223,556435	48° 17′ 27″,90	41° 42′ 32″,10
90	420	341	541	264,731977	326,062846	214,937153	50° 55′ 36″,08	39° 4′ 23″,92
91	672	185	697	178,364418	647,896700	49,103299	74° 36′ 28″,43	15° 23′ 31″,57
92	840	41	841	40,951248	839,001189	1,998810	87° 12′ 20″,30	2° 47′ 39″,70

Hosted by Google

№	a	b	c	h	p	q	α	β
93	483	44	485	43,818556	481,008247	3,991752	84° 47′ 41″,55	5° 12′ 18″,45
94	475	132	493	127,180527	457,657200	35,342799	74° 28′ 10″,81	15° 31′ 49″,19
95	459	220	509	198,388998	413,911591	95,088408	64° 23′ 29″,28	25° 36′ 30″,72
96	435	308	533	251,369606	355,018761	177,981238	54° 41′ 59″,13	35° 18′ 0″,87
97	403	396	565	282,456637	287,449557	277,550442	45° 30′ 7″,01	44° 29′ 52″,99
98	572	315	653	275,926493	501,047473	151,952526	61° 9′ 30″,42	28° 50′ 29″,58
99	660	259	709	241,100141	614,386459	94,613540	68° 34′ 25″,51	21° 25′ 34″,49
100	748	195	773	188,693402	723,808538	49,191461	75° 23′ 18″,53	14° 36′ 41″,47
101	836	123	845	121,689940	827,095857	17,904142	81° 37′ 48″,60	8° 22′ 11″,40
102	924	43	925	42,953513	923,001081	1,998918	87° 20′ 8″,02	2° 39′ 51″,98
103	525	92	533	90,619136	517,120075	15,879924	80° 3′ 37″,87	9° 56′ 22″,13
104	513	184	545	173,196330	482,878899	62,121100	70° 16′ 6″,20	19° 43′ 53″,80
105	493	276	565	240,828318	430,175221	134,824778	60° 45′ 29″,70	29° 14′ 30″,30
106	465	368	593	288,566610	364,629005	228,370994	51° 38′ 31″,15	38° 21′ 28″,85
107	460	429	629	313,736089	336,406995	292,593004	46° 59′ 49″,67	43° 0′ 10″,33
108	552	385	673	315,780089	452,754829	220,245170	55° 6′ 20″,25	34° 53′ 39″,75
109	644	333	725	295,795862	572,049655	152,950344	62° 39′ 26″,61	27° 20′ 33″,39
110	736	273	785	255,959235	690,058598	94,941401	69° 38′ 56″,33	20° 21′ 3″,67
111	828	205	853	198,991793	803,732708	49,267291	76° 5′ 38″,69	13° 54′ 21″,31
112	920	129	929	127,750269	911,087190	17,912809	82° 1′ 5″,42	7° 58′ 54″,58
113	1012	45	1013	44,955577	1011,000987	1,999012	87° 27′ 14″,18	2° 32′ 45″,82
114	575	48	577	47,833622	573,006932	3,993067	85° 13′ 41″,20	4° 46′ 18″,80
115	551	240	601	220,033277	505,159733	95,840266	66° 27′ 48″,33	23° 32′ 11″,67
116	527	336	625	283,3152	444,3664	180,6336	57° 28′ 46″,52	32° 31′ 13″,48
117	528	455	697	344,677187	399,977044	297,022955	49° 14′ 49″,67	40° 45′ 10″,33
118	624	407	745	340,896644	522,652348	222,347651	56° 53′ 9″,09	33° 6′ 50″,91
119	816	287	865	270,742196	769,775722	95,224277	70° 37′ 20″,74	19° 22′ 39″,26
120	912	215	937	209,263607	887,667022	49,332977	76° 44′ 5″,89	13° 15′ 54″,11
121	1104	47	1105	46,957466	1103,000904	1,999095	87° 33′ 44″,10	2° 26′ 15″,90
122	621	100	629	98,728139	613,101748	15,898251	80° 51′ 7″,77	9° 8′ 52″,23
123	609	200	641	190,015600	578,597503	62,402496	71° 49′ 10″,00	18° 10′ 50″,00
124	589	300	661	267,322239	524,842662	136,157337	63° 0′ 30″,71	26° 59′ 29″,29
125	561	400	689	325,689404	456,779390	232,220609	54° 30′ 38″,36	35° 29′ 21″,64
126	600	481	769	375,292587	468,140442	300,859557	51° 16′ 55″,24	38° 43′ 4″,76
127	700	429	821	365,773447	596,833130	224,166869	58° 29′ 51″,54	31° 30′ 8″,46
128	800	369	881	335,073779	726,447219	154,552780	65° 14′ 18″,55	24° 45′ 41″,45
129	900	301	949	285,458377	853,530031	95,469968	71° 30′ 27″,99	18° 29′ 32″,01
130	1100	141	1109	139,855725	1091,073038	17,926961	82° 41′ 44″,00	7° 18′ 16″,00
131	1200	49	1201	48,959200	1199,000832	1,999167	87° 39′ 42″,19	2° 20′ 17″,81

Hosted by Google

2. Tabelle vollständig berechneter schiefwinkliger Dreiecke zu Zahlenbeispielen für die Dreiecksaufgaben.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	195	195	841	841	4107	4107
b	169	169	725	725	1665	1665
c	182	52	1044	174	4884	2886
h_a	145,6	41,6	720	120	1584	936
h_b	168	48	835,2	139,2	3907,2	2308,8
h_c	156	156	580	580	1332	1332
t_a	146,06933	78,270375	794,33	318,0098	3015,955	1154,88
t_b	168,6246	114,9968	875,9008	487,2087	4434,794	3450,387
t_c	158,1518	180,6018	586,48865	780,31	1963,79	2781,652
w_c	157,21402	179,6732	582,0104	776,0139	1393,628	2264,645
p	117	117	609	609	3885	3885
q	65	— 65	435	— 435	999	— 999
u	97,5	27,85714	560,6667	93,44444	3475,154	2053,5
v	84,5	24,14286	483,3333	80,55555	1408,846	832,5
r	105,625	105,625	525,625	525,625	2566,875	2566,875
ρ	52	19,5	232	58	610,5	444
ρ_a	182	312	652,5	1740	2664	8658
ρ_b	136,5	104	522	348	888	721,5
ρ_c	156	26	1160	72,5	7326	1332
△	14196	4056	302760	50460	3252744	1922076
α	67° 22′ 48″,48	112° 37′ 11″,52	53° 7′ 48″,36	126° 52′ 11″,64	53° 7′ 48″,36	126° 52′ 11″,64
β	53° 7′ 48″,36	53° 7′ 48″,36	43° 36′ 10″,14	43° 36′ 10″,14	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72
γ	59° 29′ 23″,16	14° 15′ 0″,12	83° 16′ 1″,50	9° 31′ 38″,22	107° 56′ 42″,92	34° 12′ 19″,64
α_1	32° 16′ 32″,32	94° 45′ 49″,13	21° 24′ 46″,68	114° 13′ 39″,89	12° 45′ 27″,11	35° 13′ 3″,34
α_2	35° 6′ 16″,16	17° 51′ 22″,39	31° 43′ 1″,68	12° 38′ 31″,75	40° 22′ 21″,25	91° 39′ 8″,30
β_1	25° 34′ 38″,24	10° 25′ 14″,56	24° 16′ 4″,83	7° 4′ 26″,26	10° 17′ 15″,05	7° 47′ 43″,64
β_2	27° 33′ 10″,12	42° 42′ 33″,80	19° 20′ 5″,31	36° 31′ 43″,88	8° 38′ 13″,67	11° 7′ 45″,08
γ_1	32° 4′ 55″,88	7° 38′ 11″,66	45° 24′ 2″,40	5° 7′ 2″,33	84° 9′ 37″,84	24° 31′ 10″,71
γ_2	27° 24′ 27″,28	6° 36′ 48″,46	37° 51′ 59″,10	4° 24′ 35″,89	23° 47′ 5″,08	9° 41′ 8″,93

Hosted by Google

	7.	8.	9.	10.	11.	12.
a	429777	429777	1369	1369	260	260
b	229755	229755	740	740	169	169
c	400044	329'66	1887	703	273	143
h_a	211344	174216	612	228	163,8	85,8
h_b	395337,6	325886,4	1132,2	421,8	252	132
h_c	227052	227052	444	444	156	156
t_a	245426,6	185982,3	1259,224	228,8323	186,1317	87,20665
t_b	398967,3	365417,7	1606,414	1023,3696	252,8324	192,0527
t_c	280604,7	302590,4	566,2935	1042,75	171,6049	207,2879
w_c	249829	272135,2	449,5006	948,9457	161,6976	197,6304
p	364905	364905	1295	1295	208	208
q	35139	— 35139	592	— 592	65	— 65
u	260684,4	214888,5	1224,895	456,333 . . .	165,4545 . . .	86,66 . . .
v	139359,6	114877,5	662,105	246,666	107,5454 . . .	56,33 . . .
r	217446,7	217446,7	1140,833 . . .	1140,833 . . .	140,833 . . .	140,833 . .
ρ	85723,7	75684	209,666 . . .	111	60,66	39
ρ_a	454104	577090,5	666	4218	234	429
ρ_b	151368	141328,3	333	234,33 . . .	117	95,33 . . .
ρ_c	350038,5	227052	3774	222	273	78
△	45415395144	374370 14916	418914	156066	21294	11154
α	81° 12′ 9″,32	98° 47′ 50″,68	36° 52′ 11″,64	143° 7′ 48″,36	67° 22′ 48″,48	112° 37′ 11″,52
β	31° 53′ 26″,84	31° 53′ 26″,84	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64
γ	66° 54′ 23″,84	49° 18′ 42″,48	124° 12′ 19″,64	17° 56′ 42″,92	75° 44′ 59″,88	30° 30′ 36″,84
α_1	27° 33′ 10″,11	37° 37′ 9″,70	10° 9′ 15″,36	75° 57′ 49″,52	24° 46′ 30″,50	63° 26′ 5″,82
α_2	53° 38′ 59″,21	61° 10′ 40″,98	26° 42′ 56″,28	67° 9′ 58″,84	42° 36′ 17″,98	49° 11′ 5″,70
β_1	15° 21′ 31″,89	13° 47′ 27″,24	10° 58′ 52″,22	6° 23′ 45″,01	18° 54′ 2″,73	12° 54′ 26″,67
β_2	16° 31′ 54″,95	18° 5′ 59″,60	7° 56′ 36″,50	12° 31′ 43″,71	17° 58′ 8″,91	23° 57′ 44″,97
γ_1	44° 47′ 3″,15	32° 34′ 51″,98	91° 29′ 51″,30	11° 40′ 7″,59	47° 14′ 36″,35	18° 33′ 57″,80
γ_2	22° 7′ 20″,69	16° 43′ 50″,50	32° 42′ 28″,34	6° 16′ 35″,33	28° 30′ 23″,53	11° 56′ 39″,04

	13.	14.	15.	16.	17.	18.
a	19604	19604	37485	37485	5840	5840
b	10933	10933	30345	30345	5329	5529
c	26013	10179	27132	17850	8687	657
h_a	10005	3915	21705,6	14280	5212,2	394,2
h_b	17940	7020	26812,8	17640	5712	432
h_c	7540	7540	29988	29988	3504	3504
t_a	17378,844	3935,996	21844,93	16384,12	6588,224	2426,632
t_b	22374,40	14631,53	28990,18	25133,03	6905,45	3188,896
t_c	9096,956	15033,986	31287,95	32913,77	3519,365	5580,687
w_c	7668,195	13802,75	30910,92	32537,81	3506,402	5568,992
p	18096	18096	22491	22491	4672	4672
q	7917	— 7917	4641	— 4641	4015	— 4015
u	16699,704	6534,66 . . .	14994	9864,474	4542,22 . . .	343,5294
v	9313,296	3644,33	12138	7985,526	4144,77	313,4706
r	14212,9	14212,9	18965,625	18965,625	4440,833 . . .	4440,833 . .
ρ	3468,4	1885	8568	6247,5	1533	194,666 . . .
ρ_a	11310	50895	40698	49980	3723	15768
ρ_b	5655	4071,6	23740,5	21420	3309,33 . . .	1971
ρ_c	43355	3770	19992	10710	12264	219
$\triangle$	98069010	3837483	406817208	267642900	15219624	1151064
α	43° 36′ 10″,14	136° 23′ 49″,86	81° 12′ 9″,92	98° 47′ 50″,68	41° 6′ 43″,51	138° 53′ 16″,49
β	22° 37′ 11″,52	22° 37′ 11″,52	53° 7′ 48″,36	53° 7′ 48″,36	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64
γ	113° 46′ 38″,34	20° 58′ 58″,62	45° 40′ 2″,32	28° 4′ 20″,96	102° 1′ 4″,85	4° 14′ 31″,87
α_1	12° 31′ 43″,70	73° 18′ 2″,73	43° 20′ 40″,25	66° 13′ 39″,52	15° 25′ 19″,78	133° 46′ 52″,07
α_2	31° 4′ 26″,44	63° 5′ 47″,13	37° 51′ 29″,07	32° 34′ 11″,16	25° 41′ 23″,74	5° 6′ 24″,43
β_1	12° 55′ 10″,11	7° 41′ 18″,42	21° 59′ 5″,42	16° 30′ 15″,70	22° 10′ 21″,29	3° 32′ 36″,99
β_2	9° 42′ 1″,41	14° 55′ 53″,10	31° 8′ 42″,94	36° 37′ 32″,66	14° 41′ 50″,35	33° 19′ 34″,65
γ_1	80° 24′ 59″,52	13° 30′ 5″,44	25° 22′ 17″,11	15° 32′ 37″,25	54° 14′ 37″,45	2° 13′ 5″,46
γ_2	33° 21′ 38″,82	7° 28′ 53″,18	20° 17′ 45″,21	12° 31′ 43″,71	47° 46′ 27″,41	2° 1′ 26″,42

Hosted by Google

	19.	20.	21.	22.	23.	24.
a	34920	34920	11271	11271	170	170
b	28227	28227	5525	5525	153	153
c	46851	9021	11492	8398	289	19
h_a	28110,6	5412,6	5408	3952	122,4	8,0470588
h_b	34776	6696	11032,32	8062,08	136	8,9411765
h_c	20952	20952	5304	5304	72	72
t_a	34511,43	11585,31	7038,252	4332,111	215,0349	68,2642
t_b	38833,24	21241,505	11041,71	9547,228	224,4065	93,69233
t_c	21432,005	31428,35	6764,91	7752,81	72,62403	161,44427
w_c	21049,88	31073,64	5754,987	8412,72	72,02492	160,9979
p	27936	27936	9945	9945	154	154
q	18915	— 18915	1547	— 1547	135	— 135
u	25908,39	4988,571	7711,737	5635,5	152,105	10
v	20942,61	4032,429	3780,263	2762,5	136,895	9
r	23522,5	23522,5	5870,3125	5870,3125	180,625	180,625
ρ	8924	2619	2154,75	1768	34	4
ρ_a	24444	81189	10608	16796	76,5	684
ρ_b	18333	12028	3536	3149,25	68	38
ρ_c	60237	3492	11492	5304	612	4,5
△	490811076	94503996	30476784	22271496	10404	684
α	47° 55′ 29″,91	132° 4′ 30″,09	73° 44′ 23″,27	106° 15′ 36″,73	28° 4′ 20″,95	151° 55′ 39″,04
β	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64	28° 4′ 20″,95	28° 4′ 20″,95	25° 3′ 27″,41	25° 3′ 27″,41
γ	95° 12′ 18″,45	11° 3′ 18″,27	78° 11′ 15″,78	45° 40′ 2″,32	126° 52′ 11″,64	3° 0′ 53″,54
α_1	17° 40′ 15″,78	115° 16′ 39″,82	22° 8′ 7″,76	37° 44′ 48″,49	9° 38′ 15″,14	148° 10′ 21″,18
α_2	30° 15′ 14″,14	16° 47′ 50″,28	51° 36′ 15″,52	68° 30′ 48″,24	18° 26′ 5″,81	3° 45′ 17″,86
β_1	21° 13′ 9″,78	7° 19′ 11″,04	14° 10′ 31″,41	11° 56′ 41″,68	15° 49′ 34″,15	2° 27′ 40″,57
β_2	15° 39′ 1″,86	29° 33′ 0″,60	13° 53′ 49″,83	16° 7′ 39″,27	9° 13′ 53″,26	22° 35′ 46″,84
γ_1	54° 13′ 26″,80	6° 6′ 54″,76	54° 37′ 39″,69	31° 1′ 49″,47	69° 26′ 38″,24	1° 35′ 12″,455
γ_2	40° 58′ 51″,64	4° 56′ 23″,52	23° 33′ 36″,09	14° 38′ 12″,85	57° 25′ 33″,40	1° 25′ 41″,085

Hosted by Google

	25.	26.	27.	28.	29.	30.
a	1880125	1880125	68450	68450	25230	25230
b	514865	514865	23125	23125	4205	4205
c	2047890	1596660	71225	58275	25375	24389
h_a	504096	393024	23100	18900	4200	4036,8
h_b	1840800	1435200	68376	55944	25200	24220,8
h_c	462800	462800	22200	22200	4176	4176
t_a	1160065,6	723524	40404,61	28178,36	13101,45	12129,08
t_b	1948868,6	1725058	68887,65	62505,99	25215,1	24723,83
t_c	922775,5	112367,6	36631,05	41965,35	12889,68	13357,083
w_c	510147,7	733337,5	25006,97	30690,31	5220	5766,859
p	1822275	1822275	64750	64750	24882	24882
q	225615	— 225615	6475	— 6475	493	— 493
u	1607643	1253416,7	53238,89	43559,09	21750	20904,857
v	440247	343243,3	17986,11	14715,91	3625	3484,143
r	1045819,53125	1045819,53125	35651,042	35651,042	12702,604	12702,604
ρ	213321,875	185120	9712,5	8633,333	1933,33	1892,25
ρ_a	1388400	3193320	61050	99900	24360	30276
ρ_b	277680	249478,125	13566,667	12487,5	2283,75	2242,667
ρ_c	2730520	925600	77700	38850	26100	20184
$\triangle$	473881746000	369467124000	790597500	646852500	52983000	50924232
α	64° 0′ 38″,76	115° 59′ 21″,24	73° 44′ 23″,26	106° 15′ 36″,74	83° 16′ 1″,49	96° 43′ 58″,51
β	14° 15′ 0″,12	14° 15′ 0″,12	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72	9° 31′ 38″,21	9° 31′ 38″,21
γ	101° 44′ 21″,12	49° 45′ 38″,64	87° 20′ 8″,02	54° 48′ 54″,54	87° 12′ 20″,3	73° 44′ 23″,28
α_1	11° 30′ 21″,81	18° 31′ 8″,11	15° 56′ 43″,44	23° 11′ 54″,92	9° 10′ 13″,52	9° 54′ 45″,89
α_2	52° 30′ 16″,95	97° 20′ 13″,13	57° 47′ 39″,82	83° 3′ 41″,82	74° 5′ 47″,97	86° 49′ 12″,62
β_1	7° 25′ 51″,24	6° 32′ 28″,02	9° 39′ 7″,35	8° 41′ 44″,29	4° 46′ 30″,36	4° 40′ 57″,77
β_2	6° 49′ 8″,88	7° 42′ 32″,1	9° 16′ 21″,37	10° 13′ 44″,43	4° 44′ 59″,86	4° 50′ 40″,44
γ_1	85° 53′ 16″,56	39° 41′ 19″,95	68° 57′ 22″,52	41° 48′ 4″,84	77° 49′ 45″,05	65° 2′ 54″,58
γ_2	15° 51′ 4″,56	10° 4′ 18″,69	18° 22′ 45″,5	13° 0′ 49″,7	9° 22′ 35″,95	8° 41′ 28″,7

Hosted by Google

	31.	32.	33.	34.	35.	36.
a	98397	98397	4675	4675	2890	2890
b	73515	73515	1445	1445	1275	1275
c	85956	49764	5100	3876	2975	2261
h_a	62244	36036	1428	1085,28	1260	957,6
h_b	83311,2	48232,8	4620	3511,2	2856	2170,56
h_c	71253	71253	1309	1309	1224	1224
t_a	63055,16	38986,71	2930,036	1758,35	1774,852	1131,7454
t_b	84759	68761,18	4838,472	4232,907	2862,683	2515,095
t_c	75472,53	83221,17	2338,659	2866,353	1666,195	1926,352
w_c	73646,25	81409,54	1436,662	2011,397	1343,419	1612,103
p	67860	67860	4488	4488	2618	2618
q	18096	— 18096	612	— 612	357	— 357
u	49198,5	28483,342	3895,8333	2960,8333	2064,2857	1568,8571
v	85956,5	21280,658	1204,1667	915,1667	910,7143	692,1429
r	50760,357	50760,357	2580,3571	2580,3571	1505,2083	1505,2083
ρ	23751	15995,5714	595	507,5714	510	430,6667
ρ_a	100282	142506	3570	7854	2677,5	4284
ρ_b	55257,429	47502	801,4268	714	793,3333	714
ρ_c	71253	29029	6545	2261	3060	1453,5
$\triangle$	3062311434	1772917146	3337950	2536842	1820700	1383732
α	$75^0\ 44'\ 59'',87$	$104^0\ 15'\ 0'',13$	$64^0\ 56'\ 32'',59$	$115^0\ 3'\ 27'',41$	$73^0\ 44'\ 23'',27$	$106^0\ 15'\ 36'',73$
β	$46^0\ 23'\ 49'',85$	$46^0\ 23'\ 49'',85$	$16^0\ 15'\ 36'',73$	$16^0\ 15'\ 36'',73$	$25^0\ 3'\ 27'',41$	$25^0\ 3'\ 27'',41$
γ	$57^0\ 51'\ 10'',28$	$29^0\ 21'\ 10'',02$	$98^0\ 47'\ 50'',68$	$48^0\ 40'\ 55'',86$	$81^0\ 12'\ 9'',32$	$48^0\ 40'\ 55'',86$
α_1	$34^0\ 24'\ 9'',58$	$66^0\ 2'\ 15'',05$	$12^0\ 54'\ 26'',67$	$21^0\ 51'\ 10'',23$	$20^0\ 10'\ 14'',35$	$32^0\ 44'\ 6'',81$
α_2	$41^0\ 20'\ 50'',29$	$38^0\ 12'\ 45'',08$	$52^0\ 2'\ 5'',92$	$93^0\ 12'\ 17'',18$	$53^0\ 34'\ 8'',92$	$73^0\ 31'\ 29'',92$
β_1	$21^0\ 32'\ 31''$	$15^0\ 11'\ 27'',56$	$8^0\ 29'\ 9'',5$	$7^0\ 21'\ 55'',21$	$12^0\ 42'\ 48''$	$10^0\ 58'\ 27'',86$
β_2	$24^0\ 51'\ 18'',85$	$31^0\ 12'\ 22'',29$	$7^0\ 46'\ 27'',23$	$8^0\ 53'\ 41'',52$	$12^0\ 20'\ 39'',41$	$14^0\ 4'\ 59'',55$
γ_1	$33^0\ 29'\ 58'',42$	$16^0\ 50'\ 50'',2$	$81^0\ 1'\ 15'',59$	$37^0\ 46'\ 10''$	$58^0\ 59'\ 10'',03$	$34^0\ 17'\ 25'',07$
γ_2	$24^0\ 21'\ 11'',86$	$12^0\ 30'\ 19'',82$	$17^0\ 46'\ 35'',09$	$10^0\ 54'\ 45'',86$	$22^0\ 12'\ 59'',29$	$14^0\ 23'\ 30'',79$

Hosted by Google

Hosted by Google